
単元：数学 III「極限」　　難易度：「標準」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

１辺の長さが a の正三角形 D_0 から出発して、多角形 $D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_n,\ \cdots$ を次のように定める。

(ｉ) AB を D_{n-1} の１辺とする。辺 AB を３等分し、その分点を A に近い方から $P,\ Q$ とする。

(ii) PQ を１辺とする正三角形 PQR を D_{n-1} の外側に作る。

(iii) 辺 AB を折れ線 $APRQB$ で置き換える。

D_{n-1} のすべての辺に対して (i)〜(iii) の操作を行って得られる多角形を D_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) D_n の周の長さ L_n を a と n で表せ。

(2) D_n の面積 S_n を a と n で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(北海道大学)

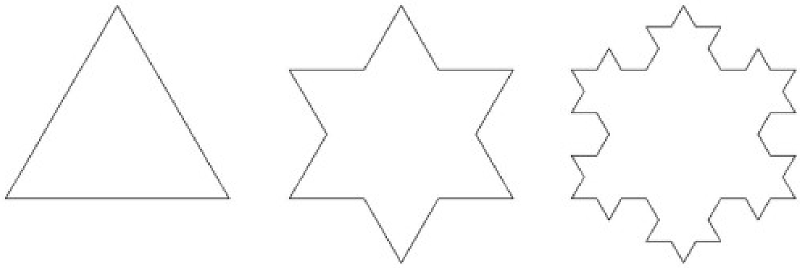
【問題の解答】

＊今回は、少し問題文が把握しづらい問題です。ただ、これはコッホ曲線と名前がついているほどの有名問題です。見た目は難しそうですが、解いてみれば大したことがない問題ですよ。

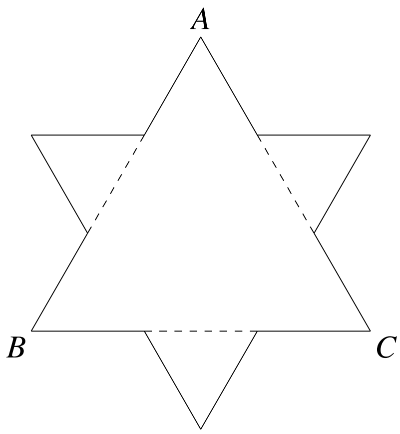
この問題は、何度も受験に出題されている頻出問題です。20 年以上前の僕が高校生のと

きから有名問題として問題集に掲載されていたことを覚えています。最近でも鳥取大学医学部でも出題されたようです。有名問題なので解法を覚えておいてください。

問題の意味が少し分かりにくいですが、要は下図のように繰り返すたびに１辺に小さな三角形ができていくというような感じで変化させるということです。



(1) ＊周の長さを求める問題です。周の長さは、辺の本数と１辺の長さを知れば求めることができるよね。それで解いていきます。



⇑上記は D_0 と D_1 をかいたものです。辺の本数は D_0 のとき３本だったものが、D_1 になると 12 本になっているよね。１本の辺が４本の辺になるので辺の本数は４倍です。一方、１辺の長さは３等分されるので、$\dfrac{1}{3}$ 倍です。これで解けてしまいます。

D_{n-1} から D_n を作るとき辺の本数は４倍となり、１辺の長さは $\dfrac{1}{3}$ 倍である。よって、D_n の周の長さは D_{n-1} の周の長さの $\dfrac{4}{3}$ 倍である。

$L_0 = 3a$ である。L_n は公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列であるので $L_n = L_0\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ つまり $L_n = \boldsymbol{3a\left(\dfrac{4}{3}\right)^n}$ となる。

(2) ＊これも D_0 と D_1 で考えると分かります。D_0 の面積が S_0 で、D_1 の面積が S_1 です。S_1 は D_0 の面積に新たにできた３個の三角形の面積を足し合わせることで求めることでできるよね。

１本の辺から１個の三角形ができます。D_0 の辺の本数が３個だったので、D_1 のときは、新たな三角形は３個できます。これで解いていくことができます。

D_n から D_{n+1} を作るときを考える。D_n の辺の本数を a_n 本、D_n の一辺の長さを x_n とする。

(1) の議論より a_n は公比４の等比数列である。また、$a_0 = 0$ であるので、$a_n = a_0 \cdot 4^n = 3 \cdot 4^n$ となる。

同じく (1) の議論より、x_n は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。$x_0 = a$ であるので、$x_n = x_0 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = a \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ となる。

D_{n+1} の面積 S_{n+1} は、D_n の面積 S_n に、１辺の長さ x_{n+1} の正三角形 a_n 個分の面積加えたものである。

１辺の長さ x_n の正三角形の面積は $\dfrac{1}{2} \cdot x_n^2 \cdot \sin 60^\circ$ であるので、$S_{n+1} = S_n + a_n \cdot \left\{\dfrac{1}{2} \cdot x_{n+1}^2 \cdot \sin 60^\circ\right\}$ となる。

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + a_n \cdot \left\{\frac{1}{2} \cdot x_{n+1}^2 \cdot \sin 60^\circ\right\} \\
S_{n+1} - S_n &= 3 \cdot 4^n \times \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\because \ a_n = 3 \cdot 4^n,\ \ x_{n+1} = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}a^2}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n
\end{aligned}
$$

＊ここからは単なる階差数列の問題です。ただ、今回は $n = 0$ から始まっているので通常の $n = 1$ から始まるタイプではありません。

階差数列の公式は、両辺の和をとることで簡単に導くことができます。今回は、両辺の和をとって考えることにします。

$n \geqq 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1}(S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3}a^2}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

⇑ 両辺の和をとりました。$\sum_{k=0}^{n-1}$ です。$\sum_{k=a}^{b}$ が定義されるのは $b \geqq a$ のときです。今回も、$\sum_{k=0}^{n-1}$ が定義されるためには $n-1 \geqq 0$ が必要で、これより $n \geqq 1$ が出てきています。

$$-\sum_{k=0}^{n-1}(S_k - S_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3}a^2}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

$$-\{(S_0 - \cancel{S_1}) + (\cancel{S_1} - \cancel{S_2}) + \cdots + (\cancel{S_{n-1}} + S_n)\} = \frac{\sqrt{3}a^2}{12} \cdot \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$$

⇑ 左辺はとなり同士の項が互いに打ち消しあいます。$S_k - S_{k+1}$ のように左側に k の小さな値が来た方が考えやすいのでマイナスで外に出してから計算しています。また、右辺は等比数列の和の公式を使っています。

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \frac{\sqrt{3}a^2}{12} \cdot \frac{9}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}a^2}{20}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

⇑ S_0 は D_0 の面積です。D_0 は１辺が a の正三角形です。

$$= \frac{\sqrt{3}a^2}{20}\left\{8-3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}$$

＊あとは、求まった式が $n=0$ のときも成立するということを確認します。階差数列のときは必ず成立してくれるんだよね。

$n=0$ を $\frac{\sqrt{3}a^2}{20}\left\{8-3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}$ に代入する。

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{3}a^2}{20}\left\{8-3\left(\frac{4}{9}\right)^0\right\} \\ =&\frac{\sqrt{3}a^2}{20}(8-3) \\ =&\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \end{aligned}$$

$S_0 = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ より、$S_n = \frac{\sqrt{3}a^2}{20} \left\{ 8 - 3 \left(\frac{4}{9} \right)^n \right\}$ は $n = 0$ のときも成立する。

よって、$S_n = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}a^2}{20} \left\{ 8 - 3 \left(\frac{4}{9} \right)^n \right\}}$ $(n \geqq 0)$ である。

(3) ＊これは付け足しのような問題ですよ。

$$\lim_{n \to \infty} S_n$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{3}a^2}{20} \left\{ 8 - 3 \left(\frac{4}{9} \right)^n \right\}$$
$$= \frac{\sqrt{3}a^2}{20}(8 - 0)$$
$$= \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}}$$

【感想】

この問題は受験に何度も出題されている有名問題です。有名問題は、とにかく解法を覚えるしかないですよ。

受験でまったく同じ問題が出題されます。解法さえ覚えておけば、絶対に満点がとれるよね。大変だと思うけど、こういう有名な問題をひとつずつ頭に入れていってください。頑張ってください。