「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 III「複素数平面」　　難易度：「発展」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

自然数 n と実数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ に対して、２つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

を考える。α, β を異なる複素数とする。複素数平面上の２点 α, β を結ぶ線分上にある点 γ で、

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき、

$\alpha, \beta, f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし、i は虚数単位とする。

(1) $n = 2$ のとき、どのような $\alpha, \beta, f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。

(2) $\alpha = 1 - i,\ \beta = 1 + i,\ f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための、実数 a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。

(3) $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}},\ \beta = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ f(x) = x^7$ は、平均値の性質をもたないことを示せ。

【問題の解答】

＊「平均値の性質をもつ」という言葉が数学的に正しいかどうかはわかりません。問題を作った人が勝手に作った性質かもしれないですし、大学数学以降で勉強をする内容なのかもしれません。僕の場合、大学での先攻は地学 (かなりマイナー) で大学数学は詳しくありません。もしかしたら、ちゃんとした言葉かもしれないですね。

関係のない話しをタラタラと申し訳ありません。ただ、今回のように、出題者自身が数学の新しい定義を問題に書いて解いていくという問題はたまにみかけますよ。

一見難しく感じるかもしれませんが、問題を丁寧に読んで解いていくだけです。自分勝手に判断をせずにとにかく丁寧に解いていくようにしてください。

(1) $n = 2$ のとき

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ であり、$f'(x) = 2a_2x + a_1$ となる。

＊一気に $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ を計算すると分数で大変なので、まずは分子の $f(\beta) - f(\alpha)$ だけを計算しておくことにします。

$$\begin{aligned} f(\beta) - f(\alpha) &= a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0 - (a_2\alpha + a_1\alpha + a_2) \\ &= a_2(\beta^2 - \alpha^2) + a_1(\beta - \alpha) \\ &= a_2(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) + a_1(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \frac{a_2(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) + a_1(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= a_2(\beta + \alpha) + a_1 \\ &= 2a_2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + a_1 \end{aligned}$$

点 $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ は 2 点 α, β を結ぶ線分の中点である。つまり点 $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ は 2 点 α, β を結ぶ線分上の点である。

よって、$\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$ であり、点 $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ は 2 点 α, β を結ぶ線分上の点である。

よって、$n=2$ のときどのような $\alpha,\beta,f(x)$ も平均値の性質をもつ。(証明終)

(2) ＊多少メンドウですが、$f(\beta)-f(\alpha)=f(1+i)-f(1-i)$ をそのまま計算をして解いていくことにします。

$\alpha=1-i,\ \beta=1+i,\ f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ である。

$$
\begin{aligned}
&f(\beta)-f(\alpha)\\
=&f(1+i)-f(1-i)\\
=&(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c-\left\{(1-i)^3+a(1-i)^2+b(1-i)+c\right\}\\
=&1+3i+3i^2+i^3+a(1+2i+i^2)+b(1+i)+c-1+2i-3i^2+i^3+a(-1+2i-i^2)+b(-1+i)-c\\
=&6i+2i^3+4ai+2bi\\
=&2(2a+b+2)i
\end{aligned}
$$

一方、$\beta-\alpha=(1+i)-(1-i)=2i$ である。よって、$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{2(2a+b+2)i}{2i}=$ $2+2a+b$ となる。

＊あとは、$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ をみたす γ を求めます。そして、平均値の定理の性質をみたすとき、点 γ が 2 点 α,β を結ぶ線分上にあるという条件を使って解いていきます。

$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ は $2+2a+b=3\gamma^2+2a\gamma+b$ つまり $3\gamma^2+2a\gamma-2a-2=0$ となる。

解の公式より

$$
\begin{aligned}
\gamma&=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-3\cdot(-2a-2)}}{3}\\
&=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+6a+6}}{3}
\end{aligned}
$$

＊ここから点 γ が 2 点 α,β を結ぶ線分上にあるということを考えています。今、$\alpha=1-i,\ \beta=1+i$ です。ということは 2 点 α,β を通る直線上に点 γ があるための条件は、γ の実部が 1 ということです。

線分で考えることはややこしいので、まずは直線上にあるを考えて、そこから線分上にあるということを考えていきます。

点 γ が 2 点 α, β を結ぶ線分上にあるとき、点 γ が 2 点 α, β を結ぶ直線上にある必要がある。このとき、γ の実部が 1 である。

＊ここから γ が実数のときと虚数のときとで実部が変わってきます。場合分けをして解いていくことにします。

(ｉ) $a^2 + 6a + 6 > 0$ のとき

γ は実数である。よって、γ の実部が 1 となるとき $\gamma = 1$ となるときである。

$3\gamma^2 + 2a\gamma - 2a - 2 = 0$ に $\gamma = 1$ を代入すると $3 + 2a - 2a - 2 = 0$ つまり $1 = 0$ となり成立しない。よって、$\gamma = 1$ は不適である。以上より、γ が実数であるとき γ が 2 点 α, β を結ぶ直線上にくることはない。

(ii) $x^2 + 6a + 6 < 0$ のとき

$\gamma = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 6a + 6}}{3} = \dfrac{-a \pm \sqrt{-(-a^2 - 6a - 6)}}{3} = \dfrac{-a \pm \sqrt{-a^2 - 6a - 6}i}{3}$ である。よって、γ の実部は $-\dfrac{a}{3}$ である。γ の実部 1 であるので $-\dfrac{a}{3} = 1$ つまり $a = -3$ である。

＊現時点では点 γ が 2 点 α, β を結ぶ直線上にくるということが分っただけです。今から、γ が線分上にくるかどうかを考えていきます。

$\gamma = \dfrac{-a \pm \sqrt{-a^2 - 6a - 6}i}{3}$ に $a = -3$ を代入する。

このとき、$\gamma = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{-(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 6}}{3} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

2 点 $1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ は 2 点 α, β を結ぶ線分上にあるので適する。

よって、求める必要十分条件は「$\boldsymbol{a = -3}$ かつ $\boldsymbol{b, c}$ は任意の実数」である。

⇑先ほど解いていったとき a しか出てきませんでした。このとき、b, c はなんでも条件をみたすということなので、b, c の条件は任意の実数です。

(3) ＊これも普通に解いていくだけです。とりあえず $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ で γ を求めます。その γ が、２点 α,β を結ぶ線分上にくることはない、の流れで示していきます。

$$
\begin{aligned}
&f(\beta)-f(\alpha)\\
=&\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^7-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^7\\
=&\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^7-\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^7 \quad \blacktriangleleft \text{それぞれを極形式で表した！}\\
=&\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)-\left\{\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right)\right\} \quad \blacktriangleleft \text{ド・モアブルの法則より！}\\
=&\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi-\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\\
=&2i\sin\frac{7}{4}\pi\\
=&2i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
=&-\sqrt{2}i
\end{aligned}
$$

また $\beta-\alpha=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}-\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}i=\sqrt{2}i$ である。よって、$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}=-1$ である。

$f(x)=x^7$ のとき $f'(x)=7x^6$ より $f'(\gamma)=7\gamma^6$ である。

$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ より $7\gamma^6=-1$ つまり $\gamma^6=-1$ である。

＊ $\gamma^6=-1$ は単なる方程式なので γ を具体的に求めることができます。この求まった γ が２点 α,β を結ぶ線分上にくることはないという流れで平均値の定理が成立することがないということを示します。

$\gamma^6=-\dfrac{1}{7}$ より $|\gamma|=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}$ である。$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とする。また、$-\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{7}\cos\pi+i\sin\pi$ である。

$$\gamma^6 = -\frac{1}{7}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt[6]{7}}(\cos\theta + i\sin\theta)\right\}^6 = \frac{1}{7}(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\cos 6\theta + i\sin 6\theta = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$6\theta = \pi + 2n\pi \ \ (n\text{ は整数})$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{n}{3}\pi$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に限り、$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$ となる。

＊点 γ が 2 点 α, β を結ぶ線分上にあるとき γ の実部が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ です。こうなることはないということを記しておけば OK です。

γ の実部はそれぞれ $\frac{1}{\sqrt[6]{7}}\cos\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{\sqrt[6]{7}}\cos\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{\sqrt[6]{7}}\cos\frac{5}{6}\pi,\ \frac{1}{\sqrt[6]{7}}\cos\frac{7}{6}\pi,\ \frac{1}{\sqrt[6]{7}}\cos\frac{3}{2}\pi,\ \frac{1}{\sqrt[6]{7}}\cos\frac{11}{6}\pi$ となるが、いずれも実部が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ と一致することはない。

⇑ さらにそれぞれの実部の値を丁寧に求めておいた方がよいかもしれません。ですから、上記で実部が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ と一致することがないということは明らかです。ですから、この程度の記述でよいと思いますよ。

よって、点 γ は 2 点 α, β を結ぶ線分上にない。よって、$\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}},\ \beta = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ f(x) = x^7$ は、平均値の性質をもたない。(証明終)

【感想】

かなりややこしい問題だったよね。今回のように問題文で新しく定義される問題ってたまに出題されますよ。

見慣れないので難しく感じますが、問題文で書かれている定義に従って解いていけば比較的簡単に解ける問題も多いです。

こういう出題の問題にも慣れておくようにしてくださいね。