
単元：数学 III「微分」　難易度：「標準」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

関数

$$f(x) = \sqrt{4-2\cos x} - \frac{1}{2}x \ \ (0 \leqq x \leqq \pi)$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f'(x) > 0$ となる x の値の範囲を求めよ。

(3) $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。

【問題の解答】

(1) ＊これは微分をするだけの問題です。合成関数の微分の公式 $(\{f(x)\}^n)' = n\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x)$ の公式を使って解いていきます。間違えやすい問題なので丁寧に解くようにしてくださいね。

$$f(x) = (4-2\cos x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4-2\cos x)^{-\frac{1}{2}}(4-2\cos x)' - \frac{1}{2}$$ ◀ 合成関数の微分の公式より！

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-2\cos x}} \cdot 2\sin x - \frac{1}{2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sin x}{\sqrt{4-2\cos x}} - \frac{1}{2}}$$

(2) ＊少し難しい考え方をしますが重要な問題ですよ。こういった問題を解けるようになっておいてください。解法は、解答を読めば分かると思いますよ。

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{4-2\cos x}} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2\sin x - \sqrt{4-2\cos x}}{2\sqrt{4-\cos x}}$$

$2\sqrt{4-\cos x} > 0$ より $f'(x)$ の符号は $2\sin x - \sqrt{4-2\cos x}$ の符号と一致する。また、$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $2\sin x \geqq 0$ である。このとき、$2\sin x = \sqrt{4\sin^2 x}$ となる。
⇑ $\sqrt{A^2} = |A|$ つまり $A \geqq 0$ のとき $\sqrt{A^2} = A$ で、$A < 0$ のとき $\sqrt{A^2} = -A$ です。これより、$A \geqq 0$ のとき $A = \sqrt{A^2}$ です。

何も考えずに $A = \sqrt{A^2}$ とする人が多いです。これは A が 0 以上のときにしか成立しません。$A < 0$ のときは、$A = -\sqrt{A^2}$ です。間違えやすいので気を付けてください。

よって、$2\sin x - \sqrt{4-2\cos x} = \sqrt{4\sin^2 x} - \sqrt{4-2\cos x}$ となる。

＊ここから $\sqrt{4\sin^2 x} - \sqrt{4-2\cos x}$ の符号を調べていきます。$\sqrt{A} - \sqrt{B} > 0$ のとき $A - B > 0$ となるよね。これを使って解いていきます。

$f'(x)$ と $2\sin x - \sqrt{4-2\cos x}$ の符号は一致する。また、$2\sin x - \sqrt{4-2\cos x}$ の符号と $4\sin^2 x - (4-2\cos x)$ の符号は一致する。よって、$f'(x) > 0$ のとき $4\sin^2 x - (4-2\cos x) > 0$ となる。

$$4\sin^2 x - (4-2\cos x) > 0$$
$$4(1-\cos^2 x) - 4 + 2\cos x > 0$$
$$2 - 2\cos^2 x - 2 + \cos x > 0$$
$$2\cos^2 x - \cos x < 0$$
$$\cos x(2\cos x - 1) < 0$$

$0 < \cos x < \frac{1}{2}$ となる。$0 \leqq x \leqq \pi$ より $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}}$ である。

(3) $f'(x) < 0$ のとき (2) より $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ となる。また、$f'(x) = 0$ のとき $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ である。

＊増減表を書くために $f(0), f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi)$ の値を求めておきます。

$$f(0) = \sqrt{4-2\cos 0} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \sqrt{2}$$
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{4-2\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{4-2\cos\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{4}$$
$$f(\pi) = \sqrt{4-2\cos\pi} - \frac{1}{2}\pi = \sqrt{6} - \frac{\pi}{2}$$

よって、増減表は以下のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$2-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{6}-\frac{\pi}{2}$

増減表より、$x = \frac{\pi}{2}$ のとき極大値 $\mathbf{2 - \frac{\pi}{4}}$ をとり、$x = \frac{\pi}{3}$ のとき極小値 $\mathbf{\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}}$ をとる。

今回の問題は、$f'(x)$ の符号を調べるのが少し難しかったよね。こういった問題を解きなれていない人にとっては難しかったかもしれません。

ただ、$f'(x)$ の符号は、大学受験でも頻出ですよ。「$f'(x)$ の符号を調べるときに、具体例を代入する！」という人がいます。

もちろん、それで OK なことも多いです (本来は、その解法は必要条件で解いています。ですから、個人的にはあまり好きではないですが $\cdots$)。ただ、そのやり方では対応できないものも出てきます。そういう問題にもしっかりと対応できるようになっておいてくださいね。