
単元：数学 III「極限、微積分」　　難易度：「発展」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to \sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\pi}}^{x} \frac{(x^2 + \sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3 - \sqrt{\pi}x^2 + \pi x - \pi\sqrt{\pi})t^2 \log t}\,dt$$

【問題の解説】

$\displaystyle \lim_{x \to \sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\pi}}^{x} \frac{(x^2 + \sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3 - \sqrt{\pi}x^2 + \pi x - \pi\sqrt{\pi})t^2 \log t}\,dt$ となっていて、見た目はかなり難しいよね。でも、見た目に惑わされずに落ち着いて解くようにしてください。

「リミットと定積分が同時にきたとき、定積分の計算ができるのはごくごく稀」だったんだよね。

今回の問題も、おそらくそうです。だから、「定積分の計算をする以外に何か方法はないかな？」とすることにします。

分母の $x^3 - \sqrt{\pi}x^2 + \pi x - \pi\sqrt{\pi}$ ですが、これは $x^3 - \sqrt{\pi}x^2 + \pi x - \pi\sqrt{\pi} = (x^2 + \pi)(x - \sqrt{\pi})$

と変形することができます。この変形を見て、ひょっとしたら $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ の微分係数の定義を使って解くのかな？と思えるようになって欲しいです。この問題も、この微分係数の定義に従えて解けてしまいます。

見た目がかなり煩雑で、分かりにくいかも知れません。ですが、やっていることと言えばこれまで解いてきた問題とまったく同じものです。見た目に惑わされず、常に「自分がなんのためにこの変形をしているのか？」ということを意識して解くようにしてください。それでは、解答に進みます。

【問題の解答】

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}\,dt$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{1}{x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt$$

⇑ 今回は t で積分せよ、です。t 以外はインテグラルの前にもってきて大丈夫です。

$$=\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{1}{x^2(x-\sqrt{\pi})+(\pi(x-\sqrt{\pi}))}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{1}{(x^2+\pi)(x-\sqrt{\pi})}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt$$

＊ここからなんだけど、$f(x)=\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt$ としてみるね。このとき $f(\sqrt{\pi})=0$ となるよね。

これで、$\displaystyle\frac{1}{x-\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt=\frac{f(x)}{x-\sqrt{\pi}}=\frac{f(x)-f(\sqrt{\pi})}{x-\sqrt{\pi}}$ の形が出てきます。これは、微分係数の定義が使える形になりました。

ここで、$f(x)=\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt$ とする。$f(\sqrt{\pi})=0$ であるので、

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}} \frac{1}{(x^2+\pi)(x-\sqrt{\pi})}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{1}{x^2+\pi}\cdot\frac{f(x)-f(\sqrt{\pi})}{x-\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}^2+\pi}\cdot f'(\sqrt{\pi})$$ ◀ 微分係数の定義より！

$$=\frac{f'(\sqrt{\pi})}{2\pi}$$

＊ここからは $f'(\sqrt{\pi})$ が求まれば終了です。$f'(x)$ は、積分区間に x が含まれているので、$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ の公式を使います。

ただ、今回の場合被積分関数に x が含まれているので、x はインテグラルの外に出してから積の微分をして解いていかないといけません。メンドウだけど、数学 III ではよく出るタイプだよね。

$$f(x)=\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{pi}t)e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt$$

$$=x^2\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt+\sqrt{\pi}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{te^{t^2}}{t^2\log t}\,dt$$

$$f'(x)=2x\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt+x^2\cdot\frac{e^{x^2}}{x^2\log x}+\sqrt{\pi}\cdot\frac{xe^{x^2}}{x^2\log x}$$

⇑ 前半は積の微分の公式。$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ より！

$$=2x\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{e^{t^2}}{t^2\log t}\,dt+\frac{e^{x^2}}{\log x}+\frac{\sqrt{\pi}xe^{x^2}}{x^2\log x}$$

$$f'(\sqrt{\pi})=\frac{e^{\pi}}{\log\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}\cdot e^{\pi}}{\pi\log\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{2e^{\pi}}{\log\pi}+\frac{2e^{\pi}}{\log\pi}$$

$$=\frac{4e^{\pi}}{\log\pi}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}\,dt=\frac{f'(\sqrt{\pi})}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4e^{\pi}}{\log\pi}=\boldsymbol{\frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi}}$$

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司