

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅲ「楕円、微積分」 難易度：「発展」

\*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

楕円  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \cdots \textcircled{1}$  と直線  $y = p \cdots \textcircled{2}$  ( $2 < p$ ) を考える。直線  $\textcircled{2}$  上の点  $Q(t, p)$  ( $0 \leq t$ ) から楕円  $\textcircled{1}$  に2つの接線  $l_1, l_2$  をひき、それぞれの接点を  $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$  ( $x_1 < x_2$ ) とおく。このとき、次の問に答えよ。

(1)  $t = 3$  のとき、接点  $Q_2(x_2, y_2)$  の座標は (  ,  ) である。また、接線  $l_1$  の傾

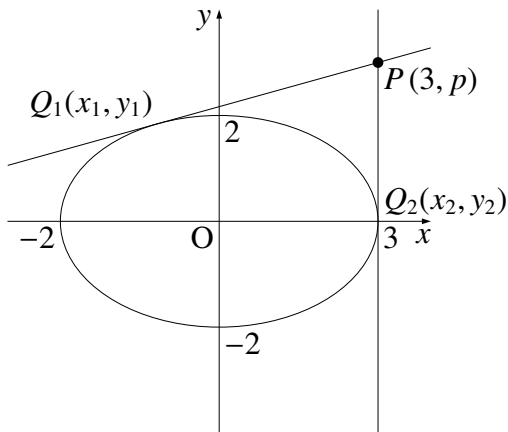
きは  $\frac{p^2 - \text{ウ}}{\text{エ} p}$  であり、また  $x_1 = \frac{\text{オカ} - \text{キ} p^2}{\text{ク} + p^2}$  である。

(2)  $t = 3, p = 2\sqrt{3}$  とする。このとき、 $x_1 = \frac{\text{ケコ}}{\text{サ}}$  である。また、この楕円の内部の点  $(x, y)$  で  $x_1 \leq x, 0 \leq y$  にある部分の面積は  $\frac{\text{シ} \pi + \text{ス} \sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}}$  である。

(3)  $t \neq 3$  とする。2つの接線  $l_1, l_2$  が直交するとき  $p^2 + t^2 = \text{タチ}$  である。また、直交しないとき、2つの接線  $l_1, l_2$  がなす角  $\angle Q_1QQ_2$  を  $\theta$  とおくと  $|\tan \theta| =$

$\frac{\text{ツ} \sqrt{\text{テ} p^2 + \text{ト} t^2 - \text{ナニ}}}{|p^2 + t^2 - \text{ヌネ}|}$  である。

### 【(1) の解答】



\*グラフより、接線のうちのひとつは直線  $x = 3$  であることが分ります。グラフから判断をして、こっこの接線の接点が  $Q_2$  となります。

グラフより、接点  $Q_2$  の座標は  $(3, 0)$  となる。

\*楕円の外側にある点からの接線の求め方は2通りの解法があります。まず、一つ目は接線が  $x$  軸に垂直でないときは、傾きを  $m$  などと設定して、点  $P$  を通る直線は  $y - p = m(x - 3)$  とおきます。そして、楕円の方程式と連立をして判別式の値が0で解いていきます。

そして二つめの解法は、楕円の接線の公式  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$  を使って解いていく解法です。どっちで解いてもよいですが、今回は後者の二つ目の解法で解いていくことにします。

点  $Q_1(x_1, y_1)$  における接線の方程式は  $\frac{x_1x}{9} + \frac{y_1y}{4} = 1$  となる。この接線が点  $Q$  を通るので、 $\frac{3x_1}{9} + \frac{py_1}{4} = 1$  つまり  $x_1 = 3 - \frac{3}{4}py_1$  が成立する。

また、点  $Q_2$  は楕円  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  上の点より、 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$  が成立する。この方程式に  $x_1 = 3 - \frac{3}{4}py_1$  を代入する。

$$\frac{\left(3 - \frac{3}{4}py_1\right)^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

$$9 - \frac{9}{2}py_1 + \frac{9}{16}p^2y_1^2 + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

$$1 - \frac{1}{2}py_1 + \frac{1}{16}p^2y_1^2 + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

$$16 - 8py_1 + p^2y_1^2 + 4y_1^2 = 16$$

$$(p^2 + 4)y_1^2 - 8py_1 = 0$$

$$y_1\{(p^2 + 4)y_1 - 8p\} = 0$$

$$y_1 = 0, \frac{8p}{p^2 + 4}$$

グラフより  $y_1 \neq 0$  であるので  $y_1 = \frac{8p}{p^2 + 4}$  である。

$x_1 = 3 - \frac{3}{4}py_1$  に  $y_1 = \frac{8p}{p^2 + 4}$  を代入すると

$$x_1 = 3 - \frac{3}{4}p \cdot \frac{8p}{p^2 + 4}$$

$$= 3 - \frac{6p^2}{p^2 + 4}$$

$$= \frac{3p^2 + 12 - 6p^2}{p^2 + 4}$$

$$= \frac{12 - 3p^2}{4 + p^2}$$

また、接線  $l_1$  は  $\frac{x_1x}{9} + \frac{y_1y}{4} = 1$  より、 $y = -\frac{4x_1}{9y_1}x + \frac{4}{y_1}$  となるので、

$$(l_1 \text{の傾き}) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{12 - 3p^2}{4 + p^2} \cdot \frac{p^2 + 4}{8p}$$

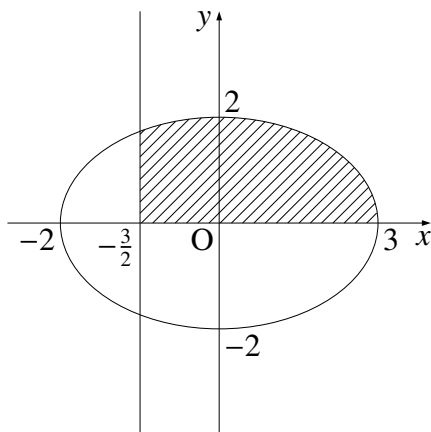
$$= \frac{p^2 - 4}{6p}$$

## 【(2) の解答】

\*楕円の面積を求める問題です。楕円の面積を求めるには、そのまま積分をする方法と  $x$  軸方向、 $y$  軸方向に縮小、拡大して解く解法があります。両方とも重要なので、両方の解法で解いておきます。

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{12 - 3p^2}{4 + p^2} \\&= \frac{12 - 3 \cdot (2\sqrt{3})^2}{4 + (2\sqrt{3})^2} \\&= \frac{12 - 36}{4 + 12} \\&= -\frac{24}{16} \\&= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

求める部分の面積は下図斜線部の面積である。



$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ より } y = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \text{ となる。 } y \geq 0 \text{ のとき、 } y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \text{ である。}$$

求める部分の面積を  $S$  とする。

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^3 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} dx \text{ となる。}$$

$$x = 3 \sin \theta \left( -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ とする。}$$

↑  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  のとき、 $x = a \sin \theta$  と置換します。

$x = 3 \sin \theta$  の両辺を  $\theta$  で微分をすると  $\frac{dx}{d\theta} = 3 \cos \theta$  つまり  $dx = 3 \cos \theta d\theta$

$$\begin{array}{l|l} x & -\frac{3}{2} \rightarrow 3 \\ \theta & -\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta \\ &= 6 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= 6 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos \theta| \cdot \cos \theta d\theta \\ &= 6 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

↑  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\cos \theta \geq 0$ 。よって  $|\cos \theta| = \cos \theta$  です。

$$\begin{aligned} &= 6 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 3 \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 3 \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right\} \\ &= 3 \left( \frac{2}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= 2\pi + \frac{3}{4} \sqrt{3} \\ &= \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

## 【(2) の別解の解説】

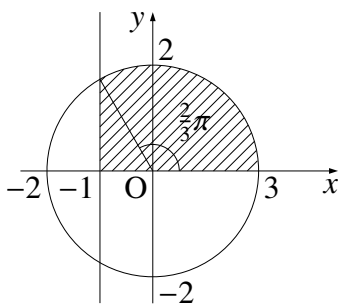
今回は楕円です。楕円は、円を  $x$  軸方向や  $y$  軸方向に一定方向に拡大、縮小したものです。

例えば、今回の楕円の場合、 $x$  軸方向に  $\frac{2}{3}$  倍に縮小したら、原点を中心とする半径が2の円になります。

積分で勉強をしたけど「微小な長方形を足し合わせる」ことで面積を求められるんだよね。今回、 $x$ 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍に縮小したとき、長方形の面積の(縦) $\times$ (横)のうち片方が $\frac{2}{3}$ 倍される訳だから、面積も $\frac{2}{3}$ 倍されます。これを使って面積を求めていきます。

### 【(2) の別解】

$x$ 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍に縮小した図形を考える。このとき、求める斜線部の面積は以下のようになる。



↑ 直線  $x = -\frac{3}{2}$  は  $x$  軸方向に  $\frac{2}{3}$  倍に縮小すると、 $x = -1$  となります。

上図の斜線部の面積を  $S'$  とする。

$$S' = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi \quad \leftarrow (\text{三角形の面積}) + (\text{おうぎ形の面積}) \text{ より!}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi$$

↑ 今回は  $x$  軸方向に  $\frac{2}{3}$  倍に縮小したものです。だから、面積も  $\frac{2}{3}$  倍されています。求める面積は、 $S'$  を  $\frac{3}{2}$  倍することで求めることができます。

よって、求める面積は  $\frac{3}{2}S' = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4}$  となる。

### 【(3) の解答】

\*よく出るタイプの問題ですよ。今回は、点  $Q(t, p)$  を通る直線を  $y - p = m(x - t)$  とおきます。こうすることで、 $m$  を含んだ式になります。今回の問題は、傾きが必要なので楕円の接線の公式  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$  ではなくて、こっちの方を使います。

$t \neq 3$  より楕円の接線は  $x$  軸に垂直になることはない。楕円の接線の方程式を  $y - p = m(x - t)$

つまり  $y = mx - mt + p$  とする。

↑  $x$  軸に垂直な場合、 $y = ax + b$  と表すことはできません。 $y - p = m(x - t)$  となるのは、 $x$  軸に垂直でないときに限ります。

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  に  $y = mx - mt + p$  を代入する。

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(mx - mt + p)^2}{4} = 1$$

$$4x^2 + 9(mx - mt + p)^2 = 36 \quad \leftarrow \text{両辺に } 36 \text{ をかけた！}$$

$$4x^2 + 9(m^2x^2 + m^2t^2 + p^2 - 2m^2tx - 2mpt + 2mpx) = 36$$

$$(9m^2 + 4)x^2 + 2(-9m^2t + 9mp)x + 9m^2t^2 + 9p^2 - 18mpt - 36 = 0$$

判別式を  $D$  とする。楕円と直線が接するとき  $D = 0$  となる。

$$\frac{D}{4} = (-9m^2t + 9mp)^2 - (9m^2 + 4)(9m^2t^2 + 9p^2 - 18mpt - 36) = 0$$

$$9^2(-m^2t + mp)^2 - (9m^2 + 4) \cdot 9(m^2t^2 + p^2 - 2mpt - 4) = 0$$

$$9(-m^2t + mp)^2 - (9m^2 + 4)(m^2t^2 + p^2 - 2mpt - 4) = 0 \quad \leftarrow \text{両辺を } 9 \text{ で割った}$$

$$9(m^4t^2 - 2m^3pt + m^2p^2) - (9m^2 + 4)(m^2t^2 + p^2 - 2mpt - 4) = 0$$

$$9m^4t^2 - 18m^3pt + 9m^2p^2 - 9m^4t^2 - 9m^2p^2 + 18m^3pt + 36m^2 - 4m^2t^2 - 4p^2 + 8mpt + 16 = 0$$

$$(36 - 4t^2)m^2 + 8pt \cdot m - 4p^2 + 16 = 0 \quad \leftarrow m \text{ で整理した！}$$

$$(9 - t^2)m^2 + 2pt \cdot m - p^2 + 4 = 0$$

\*今から2つの接線が直交するときを考えます。2直線が直交するとき、(傾き)×(傾き) = -1 です。今回の場合、傾きは  $m$  です。つまり、先ほど求めた  $m$  についての方程式  $(9 - t^2)m^2 + 2pt \cdot m - p^2 + 4 = 0$  の2解が、2接線の傾きとなります。あとは、解と係数の関係を使うだけです。

$(9 - t^2)m^2 + 2pt \cdot m - p^2 + 4 = 0$  の2解を  $m_1, m_2$  とする。 $m_1, m_2$  が2接線の傾きとなる。

解と係数の関係より  $m_1m_2 = \frac{4 - p^2}{9 - t^2}$  となる。

また、2接線が直交するので  $m_1m_2 = -1$  となる。これより、 $\frac{4 - p^2}{9 - t^2} = -1$  つまり  $p^2 + t^2 = 13$  となる。

また、2接線が直交しないときのなす角  $\theta$  は  $|\tan \theta| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right|$  をみます。

↑, 直線  $y = ax + b$  と  $x$  軸の正の向きとなす角  $\tan \theta$  は  $\tan \theta = a$  となります。

2 直線のなす角もこの性質を使って求めます。例えば、 $\tan \alpha = m_1, \tan \beta$  とします。2 直線のなす角は  $\alpha - \beta$  となったとき、 $\tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$  で加法定理を使って解くだけです。

$\alpha, \beta$  の大小関係が分からないですが、絶対値がついているのでどちらもでかまいません。

\*  $|m_1 - m_2|$  が求まっていないので、最初に求めておきます。2 乗するだけで OK ですよ。

$(9 - t^2)m^2 + 2pt \cdot m - p^2 + 4 = 0$  の 2 解が  $m_1, m_2$  である。解と係数の関係より

$$m_1 + m_2 = \frac{2pt}{9 - t^2}, m_1 m_2 = \frac{4 - p^2}{9 - t^2} \text{ となる。}$$

$$|m_1 - m_2|^2 = m_1^2 - 2m_1 m_2 + m_2^2$$

$$= (m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 \quad \blacktriangleleft \text{対称式の式変形より!}$$

$$= \left( \frac{2pt}{9 - t^2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{4 - p^2}{9 - t^2} \quad \left( \because m_1 + m_2 = \frac{2pt}{9 - t^2}, m_1 m_2 = \frac{4 - p^2}{9 - t^2} \right)$$

$$= \frac{4p^2 t^2 - 4(4 - p^2)(9 - t^2)}{(9 - t^2)^2}$$

$$= \frac{4p^2 t^2 - 4(36 - 4t^2 - 9p^2 + p^2 t^2)}{(9 - t^2)^2}$$

$$= \frac{4(p^2 t^2 - 36 + 4t^2 + 9p^2 - p^2 t^2)}{(9 - t^2)^2}$$

$$= \frac{4(9p^2 + 4t^2 - 36)}{(9 - t^2)^2}$$

$$|m_1 - m_2| = 2 \sqrt{\frac{9p^2 + 4t^2 - 36}{(9 - t^2)^2}}$$

$$= \frac{2 \sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36}}{|9 - t^2|} \quad \blacktriangleleft \sqrt{A^2} = |A| \text{ より!}$$



$$\begin{aligned}
& \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \\
&= \frac{|m_1 - m_2|}{|1 + m_1 m_2|} \quad \leftarrow \text{絶対値の性質の } \left| \frac{B}{A} \right| = \frac{|B|}{|A|} \text{ より！} \\
&= \frac{2\sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36}}{|9 - t^2|} \times \frac{1}{\left| 1 + \frac{4 - p^2}{9 - t^2} \right|} \\
&= 2\sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36} \times \frac{1}{|9 - t^2| \left| 1 + \frac{4 - p^2}{9 - t^2} \right|} \\
&= 2\sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36} \times \frac{1}{\left| (9 - t^2) \cdot \left( 1 + \frac{4 - p^2}{9 - t^2} \right) \right|} \quad \leftarrow |A||B| = |AB| \text{ の絶対値の性質より！} \\
&= 2\sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36} \times \frac{1}{|9 - t^2 + 4 - p^2|} \\
&= \frac{2\sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36}}{|-p^2 - t^2 + 13|} \\
&= \frac{2\sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36}}{|p^2 + t^2 - 13|} \quad \leftarrow \text{絶対値の性質の } |-A| = |A| \text{ より、 } |-p^2 - t^2 + 13| = |p^2 + t^2 - 13|
\end{aligned}$$

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>

---

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司