
単元：数学 III「複素数平面」　　難易度：「発展」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

次の各問いに答えよ。ただし、i は虚数単位とする。
座標平面において、原点を O とする。座標平面上の点 $A(x, y)$ を複素数 $A(z)$(ただし $z = x + iy$) に移す操作を X とする。また、複素数 $A(z')$(ただし $z' = x' + iy'$) を座標平面上の点 $A(x', y')$ に移す操作を Y とする。

(1) 座標平面上の原点、および２点 $B\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(\sqrt{6}-\sqrt{2},\ \sqrt{6}+\sqrt{2})$ からなる三角形を $\triangle\mathrm{OBC}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ がなす角をラジアン単位で求めよ。また、$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積を求めよ。

(2) BC の中点を M とする。操作 X によって、B, C, M から複素数 β, γ, μ が得られたとき、β, γ, μ を複素数平面の原点周りに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転させて得られる複素数 β', γ', μ' を求めよ。

(3) β', γ', μ' を操作 Y によって座標平面に移した点を B', C', M' とする。x 軸と OM' がなす小さいほうの角を θ とするとき、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4) 操作 X と Y の組み合わせて $\triangle\mathrm{OBC}$ を原点 O 周りに回転させるとする。$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積が y 軸で二等分されるとき、B に対応する点を B''、C に対応する点を C'' とした場合、$B''C''$ を通る直線の方程式を求めよ。

【問題（1）の解答】

＊何も考えることなく普通に計算をしていくだけの問題ですよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (\sqrt{6}-\sqrt{2},\ \ \sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 &= \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}(8+4\sqrt{3})\\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 &= (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2\\ &= 8-4\sqrt{3}+8+4\sqrt{3}\\ &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\\ &= (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})\\ &= 4\end{aligned}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| |OC| \cos\theta$$

$$2\cdot 4 = 4\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より、$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ である。

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{OBC}) &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\cos\theta\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \boldsymbol{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

【問題（2）の解答】

＊これも（1）に引き続いて、単純に計算をするだけの問題です。解答ではすべて丁寧に書いていますが、同じような計算がかなり出てきます。それを利用して解くようにしてくださいね。

$$\beta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$$

$$\beta' = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+2}{4} - \frac{2\sqrt{3}+2}{4}i + \frac{2\sqrt{3}-2}{4}i + \frac{2\sqrt{3}-2}{4}$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{3} - i}$$

$$\gamma = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) + (\sqrt{6}+\sqrt{2})i$$

$$\gamma' = \{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + (\sqrt{6}+\sqrt{2})i\}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + (\sqrt{6}+\sqrt{2})i\}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-2}{2} - \frac{2\sqrt{3}-2}{2}i + \frac{2\sqrt{3}+2}{2}i + \frac{2\sqrt{3}+2}{2}$$

$$= \boldsymbol{2\sqrt{3} + 2i}$$

点 M は BC の中点なので

$$M\left(\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\mu' = \left(\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

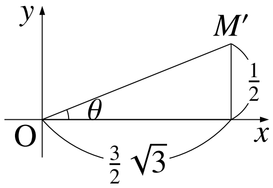
$$= \left(\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \frac{6\sqrt{3}-2}{8} - \frac{6\sqrt{3}-2}{8}i + \frac{6\sqrt{3}+2}{8}i + \frac{6\sqrt{3}+2}{8}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i}$$

【問題（３）の解答】

＊これは簡単ですよ。M' は先ほどの（２）で求めました。それを利用するだけです。また、問題は「x 軸と OM' のなす小さい方の角」となっています。M' の x 座標も y 座標も正なので、「小さいほうの角」は x 軸の正の向きとなす角となりますよ。



上図のように、線分 OM' と x 軸の正の向きとなす角が θ となる。

三平方の定理より、$OM = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{7}$

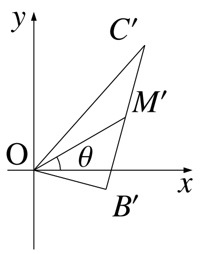
図より、$\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{14}}$、$\cos\theta = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{21}}{14}}$

【問題（４）の解説】

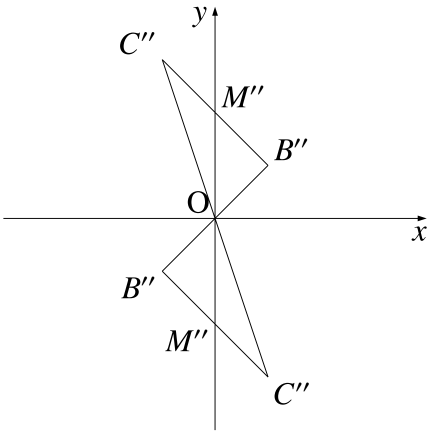
「△OBC の面積が y 軸で２等分される」なんて少しわかりにくい表現が使われています。

これって、辺 BC の中点の M が y 軸上にくるように移動された場合ってなるよね。

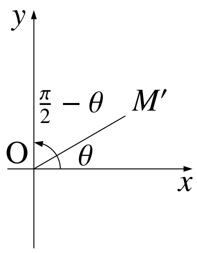
いろいろな解き方があると思うけど、回転で考えることにします。



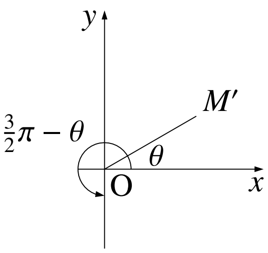
上図で、点 M' が y 軸上にくるように $\triangle OB'C'$ を回転させます。y 軸上といっても、y 座標の正の部分のときと、負の部分で２通りがあります。



まずは、点 M' が回転によって、y 軸上で y 座標の正の部分にくる場合を考えます。下図のように、角度が $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ なので、点 M' を原点を中心に $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ だけ回転をすると、M' が y 軸上の y 座標が正の部分にきてくれます。



M' が y 軸上の y 座標が負の部分にくるものは、下図のとおり M' を原点を中心に $\dfrac{3}{2}\pi-\theta$ だけ回転したものです。



あとは、回転の計算をするだけです。回転の計算は複素数平面を使って解くことが一般的です。それでは、解答に進みます。

【問題（４）の解答】

$\triangle OB''C''$ の面積が y 軸によって２等分される。このとき、線分 $B''C''$ の中点が y 軸上にくるときである。$B''C''$ の中点を M'' とする。

（ｉ）M'' が y 軸上の y 座標が正の部分にくるとき。

点 M' を原点を中心に $\frac{\pi}{2}-\theta$ だけ回転させると M'' が y 軸上にくる。よって、直線 $B'C'$ を原点に中心に $\frac{\pi}{2}-\theta$ だけ回転させて直線が直線 $B''C''$ と一致する。

＊直線 $B'C'$ の方程式が必要なので、まずはこの直線の方程式を求めておきます。

（２）より、$B'(\sqrt{3},-1), C'(2\sqrt{3},2)$ である。

$$y-(-1)=\frac{2-(-1)}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$$ ◀ 直線の方程式の公式 $y-b=m(x-a)$ より！

$$y=\sqrt{3}x-4$$

＊ここからは回転です。回転は複素数平面を使うのが簡単です。

点 $x+yi$ を原点を中心に $\frac{\pi}{2}-\theta$ だけ回転した点を $X+Yi$ とする。

＊ここからは、x と y を X と Y のみを使って表します。上記のように $x+yi=$ でやるよりも、$X+Yi=$ で考えたいです。上記の回転を逆に考えると、点 $X+Yi$ を原点を中心に $-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ だけ回転させた点が、$x+yi$ です。

このとき、点 $X+Yi$ を原点を中心に $-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ つまり $\theta-\frac{\pi}{2}$ だけ回転させて点が $x+yi$ となる。

$$\begin{aligned}
x+yi &= (X+Yi)\left\{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\
&= (X+Yi)(\sin\theta-i\cos\theta)\\
&= X\sin\theta-X\cos\theta\cdot i+Y\sin\theta\cdot i+Y\cos\theta\\
&= (X\sin\theta+Y\cos\theta)+(-X\cos\theta+Y\sin\theta)i\\
&= \left(X\cdot\frac{\sqrt{7}}{14}+Y\cdot\frac{3}{14}\sqrt{21}\right)+\left(-X\cdot\frac{3}{14}\sqrt{21}+Y\cdot\frac{\sqrt{7}}{14}\right) \quad \left(\because\ \sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{14},\ \cos\theta=\frac{3}{14}\sqrt{21}\right)\\
&= \left(\frac{\sqrt{7}}{14}X+\frac{3}{14}\sqrt{21}Y\right)+\left(-\frac{3}{14}\sqrt{21}X+\frac{\sqrt{7}}{14}Y\right)
\end{aligned}$$

よって、$x=\frac{\sqrt{7}}{14}X+\frac{3}{14}\sqrt{21}Y,\ \ y=-\frac{3}{14}\sqrt{21}X+\frac{\sqrt{7}}{14}Y$ となる。

⇑ これで x, y を X, Y だけで表すことができました。後は、直線 $B'C'$ の方程式 $y = \sqrt{3}x - 4$ に代入するだけですよ。

$y = \sqrt{3}x - 4$ に $x = \dfrac{\sqrt{7}}{14}X + \dfrac{3}{14}\sqrt{21}Y,\ \ y = -\dfrac{3}{14}\sqrt{21}X + \dfrac{\sqrt{7}}{14}Y$ を代入する。

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{14}\sqrt{21}X + \frac{\sqrt{7}}{14}Y &= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{7}}{14}X + \frac{3}{14}\sqrt{21}Y\right) - 4 \\
-3\sqrt{21}X + \sqrt{7}Y &= \sqrt{21}X + 9\sqrt{7}Y - 56 \\
-3\sqrt{3}X + Y &= \sqrt{3}X + 9Y - 8\sqrt{7} \\
8Y &= -4\sqrt{3}X + 8\sqrt{7} \\
Y &= -\frac{\sqrt{3}}{2}X + \sqrt{7}
\end{aligned}
$$

よって、求める直線の方程式は $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{7}$ である。

(ｉｉ) M'' が y 軸上の y 座標が負の部分にくるとき。

＊先ほどとまったくと言ってよいほど同じ式変形をするだけです。対称性を考えて解いてもよいと思います。(別解参照)

点 M' を原点を中心に $\dfrac{3}{2}\pi - \theta$ だけ回転させると M'' が y 軸上にくる。よって、直線 $B'C'$ を原点に中心に $\dfrac{3}{2}\pi - \theta$ だけ回転させて直線が直線 $B''C''$ と一致する。

点 $x + yi$ を原点を中心に $\dfrac{3}{2}\pi - \theta$ だけ回転した点を $X + Yi$ とする。

このとき、点 $X + Yi$ を原点を中心に $-\left(\dfrac{3}{2}\pi - \theta\right)$ つまり $\theta - \dfrac{3}{2}\pi$ だけ回転させて点が $x + yi$ となる。

$$
\begin{aligned}
x+yi &= (X+Yi)\left\{\cos\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)\right\}\\
&= (X+Yi)(-\sin\theta+i\cos\theta)\\
&= -X\sin\theta+X\cos\theta\cdot i-Y\sin\theta\cdot i-Y\cos\theta\\
&= (-X\sin\theta-Y\cos\theta)+(X\cos\theta-Y\sin\theta)i\\
&= \left(-X\cdot\frac{\sqrt{7}}{14}-Y\cdot\frac{3}{14}\sqrt{21}\right)+\left(X\cdot\frac{3}{14}\sqrt{21}-Y\cdot\frac{\sqrt{7}}{14}\right)\quad\left(\because\ \sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{14},\ \cos\theta=\frac{3}{14}\sqrt{21}\right)\\
&= \left(-\frac{\sqrt{7}}{14}X-\frac{3}{14}\sqrt{21}Y\right)+\left(\frac{3}{14}\sqrt{21}X-\frac{\sqrt{7}}{14}Y\right)
\end{aligned}
$$

よって、$x=-\frac{\sqrt{7}}{14}X-\frac{3}{14}\sqrt{21}Y,\ y=\frac{3}{14}\sqrt{21}X-\frac{\sqrt{7}}{14}Y$ となる。

$y=\sqrt{3}x-4$ に $x=-\frac{\sqrt{7}}{14}X-\frac{3}{14}\sqrt{21}Y,\ y=\frac{3}{14}\sqrt{21}X-\frac{\sqrt{7}}{14}Y$ を代入する。

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{14}\sqrt{21}X-\frac{\sqrt{7}}{14}Y &= \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}X-\frac{3}{14}\sqrt{21}Y\right)-4\\
3\sqrt{21}X-\sqrt{7}Y &= -\sqrt{21}X-9\sqrt{7}Y-56\\
3\sqrt{3}X-Y &= -\sqrt{3}X-9Y-8\sqrt{7}\\
8Y &= -4\sqrt{3}X-8\sqrt{7}\\
Y &= -\frac{\sqrt{3}}{2}X-\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

よって、求める直線の方程式は $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{7}$ である。

以上より、求める直線の方程式は $\boldsymbol{y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{7},\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{7}}$ である。

【問題（４）の後半の別解について】

＊ M'' の y 座標が正のときと負のときで比べると、回転が $\frac{\pi}{2}-\theta$ と $\frac{3}{2}\pi-\theta$ です。つまり、y 座標が正のものをさらに原点を中心に π だけ回転させると、y 座標が負のものになります。

原点を中心に π だけ回転とは原点対称だよね。曲線 $y=f(x)$ のグラフを原点対称移動し

たものは $-y=f(-x)$ です。これを使って解いた方が簡単です。

(ｉｉ) M'' が y 軸上の y 座標が負の部分にくるとき。

よって、直線 $B'C'$ を原点に中心に $\frac{3}{2}\pi-\theta$ だけ回転させて直線が直線 $B''C''$ と一致する。このとき、場合分け (i) で求めた直線 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{7}$ を原点対称移動したものである。

直線 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{7}$ を原点対称移動すると、$-y=-\frac{\sqrt{3}}{2}(-x)+\sqrt{7}$

つまり求める直線の方程式は $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{7}$ である。

＊少し問題文が長く意味を読み取るのがややこしいことと、あと計算が少し煩雑です。ただ、やっていることひとつずつはごくごく簡単なものです。

実際の受験問題は一見難しく見えたとしても大したことがないということが多いですよ。見た目に惑わされずに解けるようになっておいてください。

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司