「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 III「積分」　難易度：「発展」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

関数 $f(x)=\sqrt{9+\frac{19}{9}\sin x}$ の積分により二つの関数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \quad と \quad S(x)=\int_0^x f(x+t)\,dt$$

を定める。このとき、すべての実数 a について、$x=a$ における微分係数 $F'(a)$ と $S'(a)$ は正の実数である。たとえば、$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ であり、$S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。したがって $S(x)$ の逆関数 $g(x)=S^{-1}(x)$ が存在する。この関数 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ について

$$g'(0)=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}} \quad であり、\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\frac{\boxed{クケコ}}{\boxed{サシス}}$$

である。

【問題３前半 (アイウエオ) の解説】

前半は、下記の定積分の微分の公式を適用するだけですよ。

定積分の微分の公式

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$$

$S(x) = \int_0^x f(x+t)\,dt$ は被積分関数に x が含まれているので、このままでは微分できません。

こんなときは、$x+t=u$ と置換するとうまくいくんだったんだよね。被積分関数で、$f(x+t)$ なんてきたときは $f(x)$ がわかっていないとき、これをこのまま式変形することはできません。そんなとき、中身の $x+t$ を何か別の文字で置換することが多いですよ。

【問題３前半 (アイウエオ) の解答】

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f(x)$$ ◀ 微分の公式より！

$$= \sqrt{9+\frac{19}{9}\sin x}$$

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{9+\frac{19}{9}\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{9+\frac{19}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{100}{9}}$$

$$= \mathbf{\frac{10}{3}}$$

$S(x) = \int_0^x f(x+t)\,dt$。ここで、$x+t=u$ とする。$dx = dt$

t	$0 \to x$
u	$x \to 2x$

$$S(x) = \int_{x}^{2x} f(u)\,du$$

$$S'(x) = (2x)'f(2x) - x'f(x)$$ ◀ $\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$ の公式より！

$$= 2f(2x) - f(x)$$

$$S'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\cdot 3 - \frac{10}{3}$$

$$= \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

【問題３後半 (カキクケコサシス) の解説】

後半は、かなりややこしい問題です。これは逆関数の知識が必要なので、まずは逆関数の説明をしていきます。

少し話しは長くなるけど、頑張ってついてきてくださいね。逆関数は、とっても重要ですよ。

逆関数

関数 $y = f(x)$ が「$f(x)$ の値域にふくまれる任意の値 a に対して、$f(x) = a$ となる x がただ１つ存在するとき」逆関数が存在します。

$f(x)$ の逆関数は、$\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ (読み方は「エフ・インバース・エックス」です) とかく。

上記の「$f(x)$ の値域にふくまれる任意の値 a に対して、$f(x) = a$ となる x がただ１つ存在するとき」は、「関数 $y = f(x)$ は上への１対１の関数」ということもあります。

厳密に言えば、少し違うのかもしれませんが、単調増加や単調減少の関数のとき逆関数が存在しますよ、と思ってもらって大丈夫です。

逆関数について

逆関数はもとの関数と x と y を入れ替えたものである。

もとの関数の定義域（x の値の範囲）が逆関数の値域（y の値の範囲）となり、元の関数の値域が逆関数の定義域となる。

逆関数は、もとの関数の x と y を入れ替えたものですよ。どの段階で入れ替えてもらってもいいのですが、通常もとの関数を x について解いてから、x と y を入れ替えることが多いです。

さらに、逆関数は次の性質があります。

逆関数の性質

２曲線 $\boldsymbol{y = f(x), y = f^{-1}(x)}$ は、直線 $\boldsymbol{y = x}$ に関して対称である。

上記の性質が分からないという人がいます。でも、簡単ですよ。２点 $(a, b), (b, a)$ は直線 $y = x$ に関して対称です。

＊ x 座標と y 座標を入れ替えた点どうしは、直線 $y = x$ に関して対称ですよ。なぜ対称になるか、下記で説明しています。

２点を結ぶ線分の中点が直線 l 上にある。かつ２点 A, B を通る直線と直線 l が垂直である。この２つを満たしているとき、２点 A, B は直線 l に関して対称です、

点 (a, b) の直線 $y = x$ に関する対称点が (b, a) であるとき、上記の２つを満たしています。このことは簡単に確認できますよ。

２点 $(a.b).(b, a)$ を結ぶ線分の中点は $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right)$ です。この点は直線 $y = x$ 上の点です。

また、２点 $(a, b), (b, a)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{a-b}{b-a} = -1$ です。この直線は直線 $y = x$ と垂直です。よって、点対称であるための２つの条件を満たしているので、点 (a, b) と点 (b, a)

は直線 $y = x$ に関して対称です。

こういうふうに、x 座標と y 座標を入れ替えた点 (a, b) と点 (b, a) は直線 $y = x$ に関して対称と言うことは簡単に確認することができます。

だけど、毎回確認していたら面倒なので、点 (a, b) の直線 $y = x$ に関する対称点は点 (b, a) になる、ということは覚えておいたらいいですよ。

逆関数ともとの関数は x と y を入れ替えたものです。ですから、「2曲線 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ は、直線 $y = x$ に関して対称である」ということも納得できると思います。

それでは、逆関数の最後の性質。逆関数の合成関数です。その前にまずは合成関数について簡単にまとめておきます。

合成関数は、$(f \circ g)(x)$ のように表されます。$(f \circ g)(x)$ は読み方としては「f マル g エックス」です。他にもいろいろな呼び方があるみたいですが、これが一番メジャーです。なお、先頭のカッコは外して $f \circ g(x)$ と書くこともありますし、単純に $f \circ g$ なんて x を省略して書くこともありますよ。関数でも、$f(x)$ を x を省略して f と書くこともあります。それと同じようなものです。

この合成関数ですが、$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ということだけ覚えておいてもらえば十分ですよ（合成関数には、もっと深い意味があるのですが高校数学ではこれだけで十分です）。

合成関数の性質

一般的に、$\boldsymbol{f \circ g \fallingdotseq g \circ f}$ となる（中には成立するものもある）。

$\boldsymbol{(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)}$ は常に成り立つ。

＊ひとつめの性質を交換法則。２番目の性質を結合法則といいます。合成関数は、交換法則は必ずしも成立しませんが、結合法則は必ず成立します。

上記の証明はあまり出てきません。f, g, h が具体的に与えらえていて、それらを確認す

るということはたまに出てきます。

ただこういったタイプの問題は、計算がメンドウっていうだけで、やること自体はごくごく簡単ですよ。

それでは、逆関数の性質に戻ります。

逆関数の性質

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \quad (\boldsymbol{f}^{-1} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

後ほど確認しますが、逆関数の合成関数は $(f \circ f^{-1})(x), (f^{-1} \circ f)(x)$ ともに x となります。先ほど話しましたが、合成関数は通常交換法則は成り立ちません。ですが、今回はどちらの場合も交換法則が成立している特殊なパターンです。

それでは、なぜこれが成立するのか話しておきますね。

＊少し頭が混乱するかもしれません。もし、分からなかったら別にいいですよ。ただ、「$(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$」という結果だけは覚えておいてくださいね。

まずは、$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ を証明します。

$(f^{-1} \circ f)(x)$

$=f^{-1}(f(x))$

で、ここから $y = f(x)$ とします。逆関数は x と y を入れ替えているんだから、$x = f^{-1}(y)$ が成立するよね。
⇑ 上記が分かりにくい人が多いみたいです。でも、簡単ですよ。

例えば、曲線 $y = f(x)$ 上に点 (a, b) がある（このとき、$b = f(a)$ が言えています）とき、逆関数で表された曲線 $y = f^{-1}(x)$ 上に点 (b, a) があります（逆関数は、x と y を入れ替えたものだから）。だから、$a = f^{-1}(b)$ が成立します。以上より、$b = f(a)$ のとき $a = f^{-1}(b)$ が成立します。

これと同じですよ。$y = f(x)$ が成立するとき、$x = f^{-1}(y)$ が成立します。

さっきの２行目の式の $f^{-1}(f(x))$ に $y = f(x)$ を代入すると $f^{-1}(y)$ となります。

⇑ちょっとややこしいけど、$f^{-1}(f(x))$ の $f(x)$ のところに、$f(x) = y$ を代入しただけですよ。

で、$f^{-1}(y)$ は、さっき $x = f^{-1}(y)$ って言っていたんだよね。だから、$f^{-1}(y) = x$ です。これで、証明終了です。ややこしいから、もう一度書いておくね。

【証明】
$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ を示す。

$y = f(x)$ とする。$x = f^{-1}(y)$ が成立する。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (f^{-1} \circ f)(x) \\
&= f^{-1}(f(x)) \\
&= f^{-1}(y) \quad (\because \ f(x) = y) \\
&= x \quad (\because \ f^{-1}(y) = x) \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

もうひとつの「$(f \circ f^{-1})(x) = x$」の証明もまったく同じですよ。さっきは、$y = f(x)$ としたけど、今回は $y = f^{-1}(x)$ とします。$f(x)$ の逆関数が $f^{-1}(x)$ のとき、$f^{-1}(x)$ の逆関数は $f(x)$ になりますよ。

だから、さっきと同じように $y = f^{-1}(x)$ が成立するとき、$x = f(y)$ が成立します。

【証明】
$(f \circ f^{-1})(x) = x$ を示す。

$y = f^{-1}(x)$ とする。$x = f(y)$ が成立する。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (f \circ f^{-1})(x) \\
&= f(f^{-1}(x)) \\
&= f(y) \quad (\because \ f^{-1}(x) = y) \\
&= x \quad (\because \ f(y) = x) \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

これで、$(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ が成立するということが分かりました。これは、証明よりもまずは結果が重要ですよ。そこまで頻出ではないけど、たまに出てくるのでしっかりと覚えておいてくださいね。

今回は上記の性質を使って解いていきます。$S(x)$ の逆関数が $g(x)$ なので、$S(g(x)) = 1$ が成立します。ここで、この両辺を x で微分をします。

【問題３後半 (カキクケコサシス) の解答】

$S(x)$ の逆関数が $g(x)$ なので、$S(g(x)) = x$ が言える。

$$S(g(x)) = x$$

両辺を x で微分する

$$S'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$ ◀【注】を参照！

$$\{2f(2g(x)) - f(g(x))\} \cdot g'(x) = 1$$

⇑ 前半で $S'(x) = 2f(2x) - f(x)$ と求めました。ここから、$S'(g(x)) = 2f(2g(x)) - f(g(x))$ が言えます。

【注】について
難しく感じる人もいますが、単純に合成関数の微分をしただけですよ。例えば、$(\{f(x)\}^n)' = n\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x)$ってあったよね。

x の部分が $f(x)$ になったとき、微分をしたら x の部分を $f(x)$ にして最後に $f'(x)$ をかけておけば OK です。
今回の場合も同じです。$S(x)$ を微分したら $S'(x)$ なんだから、$S(g(x))$ を微分したら $S'(g(x)) \cdot g'(x)$ となります。

＊ここから、先ほど求まった式 $S'(g(x)) = 2f(2g(x)) - f(g(x))$ で $x = 0$ を代入します。$g(0)$ の値が必要なので、まず $g(0)$ の値を求めておきます。

$S(x) = \displaystyle\int_0^x f(x+t)\,dt$ より $S(0) = 0$ となる ($\Leftarrow$ $x = 0$ のとき積分区間が０から０になります。積分区間が上下同じとき、定積分の値は０になるんだよね)。

$S(0) = 0$ より $g(0) = 0$ となる。
⇑ $S(x)$ と $g(x)$ は逆関数です。逆関数とは、x と y を入れ替えたものです。だから、$b = S(a)$

のとき、$a = g(b)$ が成立します。

$\{2f(2g(x)) - f(g(x))\} \cdot g'(x) = 1$ で $x = 0$ のとき

$$\{2f(2g(0)) - f(g(0))\} \cdot g'(0) = 1$$
$$\{2f(2 \cdot 0) - f(0)\} \cdot g'(0) = 1 \quad (\because \quad g(0) = 0)$$
$$\{2f(0) - f(0)\} \cdot g'(0) = 1$$
$$f(0) \cdot g'(0) = 1$$
$$\sqrt{9 + \frac{19}{9}\sin 0} \cdot g'(0) = 1 \quad \left(\because \quad f(x) = \sqrt{9 + \frac{19}{9}\sin x}\right)$$
$$\therefore \quad g'(0) = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

＊次に $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x}$ を計算します。これって微分係数の定義の $f'(a) = \displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ っていうものがあったよね。

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = g''(0)$ となります。だから、今回は $g''(x)$ をまず求めて、その式に $x = 0$ を代入して解いていくことにします。$g''(x)$ は先ほど、$\{2f(2g(x)) - f(g(x))\} \cdot g'(x) = 1$ が出てきましたが、この両辺をさらに x で微分することで求めることができます。

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = g''(0)$ である。

$\{2f(2g(x)) - f(g(x))\} \cdot g'(x) = 1$ の両辺を x で微分する。

$$\{2f(2g(x)) - f(g(x))\} \cdot g'(x) = 1$$
$$\{2f(2g(x)) - f(g(x))\}' \cdot g'(x) + \{2f(2g(x)) - f(g(x))\} \cdot g''(x) = 0$$ ◀ 左辺は積の微分の公式を使った！
$$\{2f'(2g(x)) \cdot 2g'(x) - f'(g(x)) \cdot g'(x)\} \cdot g'(x) + \{2f(2g(x)) - f(g(x))\} \cdot g''(x) = 0$$
⇑ 合成関数の微分の公式を使った！

＊ここから、上記の式に $x = 0$ を代入します。そのときに、$f'(0)$ の値が必要なので、まずはそれを求めてから解いていくことにします。

$$f(x) = \sqrt{9 + \frac{19}{9}\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(9 + \frac{19}{9}\sin x\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(9 + \frac{19}{9}\sin x\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(9 + \frac{19}{9}\sin x\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{19}{9}\cos x$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}\left(9 + \frac{19}{9}\sin 0\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{19}{9}\cos 0$$

$$= \frac{1}{2} 9 \cdot^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{19}{9}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{9}$$

$$= \frac{19}{54}$$

$$f'(2g(0)) = f'(0) = \frac{19}{54} \cdots ①$$

$\Uparrow$ $g(0) = 0$ より $f'(2g(0)) = f'(2 \cdot 0) = f'(0)$ です！

$$f'(g(0)) = f'(0) = \frac{19}{54} \cdots ②$$

$$f(2g(0)) = f(0) = \sqrt{9 + \frac{19}{9}\sin 0} = 3 \cdots ③, \quad f(g(0)) = f(0) = 3 \cdots ④$$

$\{2f'(2g(x)) \cdot 2g'(x) - f'(g(x)) \cdot g'(x)\} \cdot g'(x) + \{2f(2g(x)) - f(g(x))\} \cdot g''(x) = 0$ に $x = 0$ を代入すると、

$$\{2f'(2g(0)) \cdot 2g'(0) - f'(g(0)) \cdot g'(0)\} \cdot g'(0) + \{2f(2g(0)) - f(g(0))\} \cdot g''(0) = 0$$

$$\left\{2 \cdot \frac{19}{54} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{19}{54} \cdot \frac{1}{3}\right\} \cdot \frac{1}{3} + (2 \cdot 3 - 3)g''(0) = 0 \quad \left(\because \ ①, ②, ③, ④, g'(0) = \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{76 - 19}{54 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} + 3g''(0) = 0$$

$$\therefore \ g''(0) = \boldsymbol{\frac{-19}{486}}$$

＊定積分の微分、逆関数、また計算も非常に煩雑でした。ただ、やっていることはすべてプリントに掲載されていたものばかりです。

プリントをしっかりと理解していれば、必ずできるはずですよ。大変だと思いますが、復習と予習。両方あわせて頑張っていってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法

https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司