「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 III「複素数平面」　　難易度：「難問」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

座標平面上で３点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ がある。ただし、A, B, C は A から順に反時計回りに並んでいる。辺 BC に関して点 A と反対側に点 D をとり辺 BC を一辺とする正三角形 BCD を $\triangle\mathrm{ABC}$ の外側に作る。同様にして、辺 CA に関して点 B と反対側に点 E をとり辺 CA を一辺とする正三角形 CAE を、辺 AB に関して点 C と反対側に点 F をとり辺 AB を一辺とする正三角形 ABF を、それぞれ $\triangle\mathrm{ABC}$ の外側に作る。$\triangle\mathrm{BCD}, \triangle\mathrm{CAE}, \triangle\mathrm{ABF}$ の重心を、それぞれ、M, N, P とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) ある点 z を原点 O を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を ωz とする。
$\omega^2 = \omega - 1$ となることを示せ。
(2) $\triangle\mathrm{DEF}$ の重心を求めよ。
(3) $AD = BE = CF$ となることを示せ。
(4) $\triangle\mathrm{MNP}$ は正三角形となることを示せ。

【問題２の解説】

この問題は、「ナポレオンの定理」と呼ばれる有名な定理の証明です。

定理とはそもそも証明できるものということです。有名な定理は過去の数学の偉人が発見したもので、その場で考えて思いつくことは難しいです。

こういった有名な定理に関する問題が大学受験に出題されることも、よくあることです。ただ、すべての有名な定理を覚えよ、と言っても定理は無数にあるので無理があります。

受験勉強は時間に限りがあります。あなたが一生懸命覚えて有名な定理が、あなたが受ける実際の大学受験で出題される可能性は限りなく低いです。

こういうふうな問題にあたったときはあきらめも必要です。ただ、今回の問題でも（１）と（２）は知識がなくても点をとることができます。

なんとか、部分点を稼いで他の問題で合格最低点を確保する。それが、現実的な考え方だと思います。

【問題２（１）の解答】

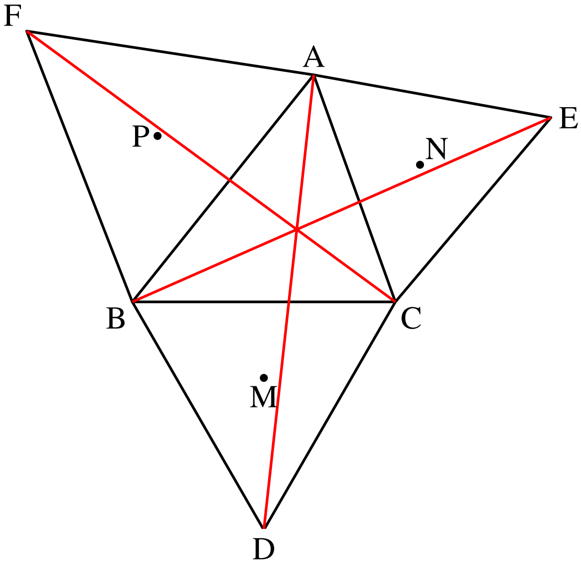
点 z を原点 O を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点が ωz であるので、$\omega z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ が成立する。

$z \neq 0$ のとき、$\omega z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ の両辺を z で割ると、$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \omega - 1\end{aligned}$$

よって、$\omega^2 = \omega - 1$ が成立する。（証明終）

【問題２（２）の解答】



３点 D, E, F を表す複素数をそれぞれ d, e, f とする。

点 B を点 C を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点が D であるので、$d - \gamma = (\beta - \gamma)\omega$ となる。

$$\begin{aligned} d - \gamma &= (\beta - \gamma)\omega \\ d &= \gamma + \omega\beta - \omega\gamma \\ &= \omega\beta - (\omega - 1)\gamma \\ &= \omega\beta - \omega^2\gamma \quad (\because \text{（１）より、} \omega - 1 = \omega^2) \end{aligned}$$

同様にして、$e = \omega\gamma - \omega^2\alpha,\ \ f = \omega\alpha - \omega^2\beta$ がいえる。

よって、DEF の重心を $G'(g')$ とすると

$$\begin{aligned} g' &= \frac{1}{3}(d + e + f) \\ &= \frac{1}{3}(\omega\beta - \omega^2\alpha + \omega\gamma - \omega^2\alpha + \omega\alpha - \omega^2\beta) \\ &= \frac{1}{3}\{\omega(\alpha + \beta + \gamma) - \omega^2(\alpha + \beta + \gamma)\} \\ &= \frac{1}{3}(\omega - \omega^2)(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \quad (\because \text{（１）より } \omega^2 = \omega - 1 \text{ つまり } \omega - \omega^2 = 1) \end{aligned}$$

以上より、△DEF の重心は $\boldsymbol{\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)}$ である。

【問題２（３）の解答】

＊知らなければ少し難しい問題です。勘の良い人なら知識なくして解けるかもしれませんが、少し難しいです。

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\frac{2}{3}\pi$ 回転したものが $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$ になり、$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を $\frac{2}{3}\pi$ 回転したものが $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ となります。

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ に対応する複素数は $d-\alpha$、$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ に対応する複素数は $e-\beta$、$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ に対応する複素数は $f-\gamma$ である。

$$\begin{aligned}\omega^2(d-\alpha) &= \omega^2\{(\omega\beta-\omega^2\gamma)-\alpha\} \ (\because \text{（１）より } d=\omega\beta-\omega^2\gamma) \\ &= \omega^3\beta-\omega^4\gamma-\omega^2\alpha \\ &= \omega\gamma-\omega^2\alpha-\beta \ (\because \ \omega^3=-1) \\ &= e-\beta \ (\because \ \omega\gamma-\omega^2\alpha=e)\end{aligned}$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転すると $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ となる。したがって、$AD=BE$ である。

⇑$\omega=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ です。これより、$\omega^2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ なので $\frac{2}{3}\pi$ 回転させてものです。

回転しても大きさは変わらない。回転して同じベクトルになるとき、ふたつのベクトルの大きさは等しいですよ。

$$\begin{aligned}\omega^2(e-\beta) &= \omega^2\{(\omega\gamma-\omega^2\alpha)-\beta\} \ (\because \text{（１）より } e=\omega\gamma-\omega^2\alpha) \\ &= \omega^3\gamma-\omega^4\alpha-\omega^2\beta \\ &= \omega\alpha-\omega^2\beta-\gamma \ (\because \ \omega^3=-1) \\ &= f-\gamma \ (\because \ \omega\alpha-\omega^2 2\beta=f)\end{aligned}$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転すると $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ となる。したがって、$BE=CF$ である。

以上より、$AB=BE=CF$ が成立する。(証明終)

【問題２（４）の解答】

３点 M, N, P を表す複素数を、それぞれ m, n, p とする。

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1}{3}(\beta+\gamma+d)\\
&= \frac{1}{3}(\beta+\gamma+\omega\beta-\omega^2\gamma) \quad (\because \quad d=\omega\beta-\omega^2\gamma)\\
&= \frac{1}{3}\{(1+\omega)\beta+(1-\omega)(1+\omega)\gamma\}\\
&= \frac{1+\omega}{3}\{\beta+(1-\omega)\gamma\}\\
&= \frac{1+\omega}{3}(\beta-\omega^2\gamma) \quad (\because \text{（１）より } \omega^2=\omega-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{1}{3}(\gamma+\alpha+e)\\
&= \frac{1}{3}(\gamma+\alpha+\omega\gamma-\omega^2\alpha) \quad (\because \quad e=\omega\gamma-\omega^2\alpha)\\
&= \frac{1}{3}\{(1+\omega)\gamma+(1-\omega)(1+\omega)\alpha\}\\
&= \frac{1+\omega}{3}\{\gamma+(1-\omega)\alpha\}\\
&= \frac{1+\omega}{3}(\gamma-\omega^2\alpha) \quad (\because \text{（１）より } \omega^2=\omega-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{3}(\alpha+\beta+f)\\
&= \frac{1}{3}(\alpha+\beta+\omega\alpha-\omega^2\beta) \quad (\because \quad f=\omega\alpha-\omega^2\beta)\\
&= \frac{1}{3}\{(1+\omega)\alpha+(1-\omega)(1+\omega)\beta\}\\
&= \frac{1+\omega}{3}\{\alpha+(1-\omega)\beta\}\\
&= \frac{1+\omega}{3}(\alpha-\omega^2\beta) \quad (\because \text{（１）より } \omega^2=\omega-1)
\end{aligned}
$$

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{MP}}$ に対応する複素数は、それぞれ $n-m$, $p-m$ である。

$$
\begin{aligned}
n-m &= \frac{1+\omega}{3}(\gamma-\omega^2\alpha)-\frac{1+w}{3}(\beta-\omega^2\gamma)\\
&= \frac{1+\omega}{3}\{\gamma-(\omega-1)\alpha-\beta+(\omega-1)\gamma\} \quad (\because \quad \omega^2=\omega-1)\\
&= \frac{1+\omega}{3}(\gamma-\omega\alpha+\alpha-\beta+\omega\gamma-\gamma)\\
&= \frac{1+\omega}{3}\{(\alpha-\beta)-\omega(\alpha-\gamma)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p-m &= \frac{1+\omega}{3}(\alpha-\omega^2\beta)-\frac{1+w}{3}(\beta-\omega^2\gamma) \\
&= \frac{1+\omega}{3}\{\alpha-(\omega-1)\beta-\beta+(\omega-1)\gamma\}\ \ (\because\ \ \omega^2=\omega-1) \\
&= \frac{1+\omega}{3}(\alpha-\omega\beta+\beta-\beta+\omega\gamma-\gamma) \\
&= \frac{1+\omega}{3}\{(\alpha-\gamma)-\omega(\beta-\gamma)\}
\end{aligned}
$$

＊ここで、もし点 N を点 M を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点ということが言えれば、△MNP が正三角形であるということが言えます。

これが言えるためには $\omega(n-m)=p-m$ が言えれば OK です。$\omega=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ だから 60° の回転です。

$$
\begin{aligned}
\omega(n-m) &= \frac{1+\omega}{3}\{(\alpha-\beta)\omega-\omega^2(\alpha-\gamma)\} \\
&= \frac{1+\omega}{3}\{(\alpha-\beta)\omega-(\omega-1)(\alpha-\gamma)\}\ \ (\because\ \ \omega^2=\omega-1) \\
&= \frac{1+\omega}{3}(\omega\alpha-\omega\beta-\omega\alpha+\omega\gamma+\alpha-\gamma) \\
&= \frac{1+\omega}{3}\{(\alpha-\gamma)-\omega(\beta-\gamma)\} \\
&= p-m
\end{aligned}
$$

以上より、点 P は点 N を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であり、$MN=MP$ も成立するので、△MNP は正三角形である。(証明終)

＊今回の問題は、「ナポレオンの定理」と呼ばれる有名な定理に関する問題です。実際の受験でも、こういう有名な定理が出題されることがあります。

とは言っても、有名な定理は無数にあり、すべてを覚えることは無理です。前提となる知識なくこういう問題が出てきたときは、とにかく部分点狙いで解いていけばよいですよ。

難しい問題ではありますが、こういう問題もある、ということを紹介したかったらあえて掲載しました。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司