
単元：数学 III「いろいろな曲線　積分」　　難易度：「標準」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

xy 座標平面上の楕円 $C : x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の $y > 0$ の範囲にある焦点を F、$y < 0$ の範囲にある焦点を F' とする。焦点 F を通り傾きが m の直線 l と楕円 C との２つの交点をそれぞれ A, B とする。直線 l と楕円 C で囲まれた２つの部分のうち、F' を含まない部分を D とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。
(2) 線分 AB の長さを m を用いて表せ。
(3) $AF' + F'B$ の最大値を求めよ。
(4) $AF' + F'B$ が最大になるときの D の面積を求めよ。
(5) $m = \sqrt{3}$ のとき、D を x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ。

【問題の解説】

この問題は楕円に関する問題ですよ。２次曲線には、放物線、楕円、双曲線の３種類がありました。そこまで頻出ではないですが、定義は覚えておいてくださいね。もし、忘れていた人はしっかりと復習をしておいてください。

【（1）の解答】

楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の焦点は 2 点 $(0,\ \pm\sqrt{2^2 - 1})$ つまり $(0,\ \sqrt{3})$ となる。

⇑ $a < b$ のとき、楕円 $\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{b^2}{y^2} = 1$ の焦点は 2 点 $(0,\ \pm\sqrt{b^2 - a^2})$ より！

このうち $y > 0$ の範囲にある焦点が F で、$y < 0$ の範囲にある焦点が F' なので、$F(0,\ \sqrt{3})$, $F'(0, -\sqrt{3})$ である。

直線 l は点 F を通り、傾き m の直線なので、l の方程式は $\boldsymbol{y = mx + \sqrt{3}}$ である。

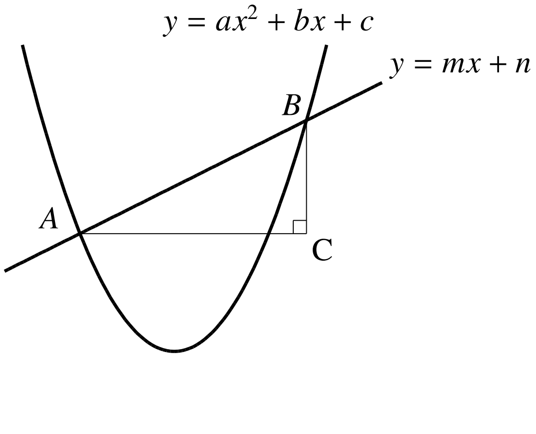
【（2）の解説】

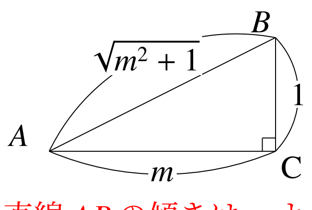
線分 AB の長さを求めるとき、2 点 A, B の座標を求めて、そこから 2 点間の距離の公式を使って求める人がいます。

もちろん、それで解けないことはないですが、それは最終手段！

線分の長さを求めるときは、2 点の座標を求めて ⋯ というのは最終手段です。他の解法をいろいろと考えて、どうしても解法が思いつかない場合にのみ使うようにしてください。

今回は、「直線が放物線によって切りとられる線分の長さ」の問題で解いたのと同じように、傾きを利用して解いていきます。





⇑ 直線 AB の傾きは m よって、$AC : CB = 1 : m$

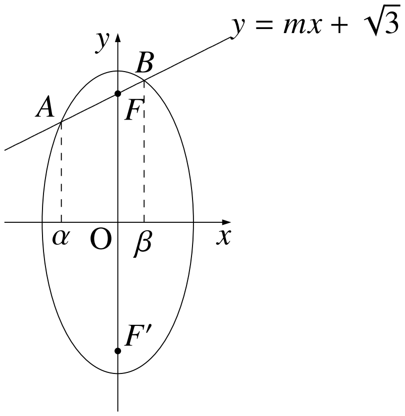
三平方の定理より $AC : CB : AB = 1 : m : \sqrt{m^2 + 1}$

線分 AC の長さは、2 式を連立をして解の公式を使って A と B の x 座標を求めます。B と C の x 座標は同じなので、AC の長さは、(点 B の x 座標) − (点 A の x 座標) で求めること

ができます。

今回の場合、楕円だけど同じようにして解いていきます。ここまでくれば簡単だと思うので、解答に進みます。

【（２）の解答】



$y = mx + \sqrt{3}$ を $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ に代入をすると、

$$x^2 + \frac{(mx + \sqrt{3})^2}{4} = 1$$
$$4x^2 + m^2x^2 + 2\sqrt{3}m \cdot x + 3 = 4$$
$$(m^2 + 4)x^2 + 2\sqrt{3}m \cdot x - 1 = 0$$

解の公式より $x = \dfrac{-\sqrt{3}m \pm \sqrt{(\sqrt{3}m)^2 - (m^2+4)(-1)}}{m^2+4} = \dfrac{\sqrt{3}m \pm 2\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}$

$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}m - 2\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{3}m - 2\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}$ とする。

$AB = \sqrt{m^2+1}(\beta - \alpha)$ ◀ 上記の考え方より！

$$= \sqrt{m^2+1}\left(\frac{\sqrt{3}m + 2\sqrt{m^2+1}}{m^2+4} - \frac{\sqrt{3}m - 2\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}}$$

【(3)の解説】

$AF' + F'B$ の最大値を求めよ、という問題です。

A, B, F' の座標がわかっているので、ついつい２点間の公式を使いたくなってしまいます。でも、さっきも話した通り２点間の距離の公式を使うのは最終手段です。

また、受験問題で（１）、（２）となっているときは、前問を使って解いていくということが常套手段だったんだよね。今回も（２）の結果を使って解いていこうと思います。

そこで、あれこれ考えるんだけど、今回 C は楕円なんだよね。楕円の場合、２焦点からの距離の和が一定、という条件がありました。これを使うことで解けます。

楕円の性質

楕円とは２焦点からの距離の和が一定である。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ がある。この焦点を F, F' とする。

焦点の座標は、$a > b$ のとき $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ であり、$a < b$ のとき $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$ である。

楕円上の任意点を P とする。$a > b$ のとき $PF + PF' = 2a$ であり、$a < b$ のとき $PF + PF' = 2b$ である。

今回の場合 $AF + AF' = 4$ かつ $BF + BF' = 4$ なんだよね。２式を足すことにより $AF + BF + AF' + BF' = 8$ です。

$AF + BF = AB$ となるよね。で、ここから（２）で求めた AB を使って解いていくことができます。

少し気づきにくい問題ですが、あれこれ考えることで気づけるはずです。こういう問題を解けるようになっておいてください。

【（３）の解答】

楕円の性質より $AF+AF'=4$ かつ $BF+BF'=4$ となる。

２式の両辺を足し合わせると $AF+BF+AF'+BF'=8$ となる。

$$
\begin{aligned}
AF+BF+AF'+BF'&=8\\
AB+AF'+F'B&=8\quad (\because\quad AF+BF=AB)\\
\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}+AF'+F'B&=8\quad \left(\because\ \text{（２）より}\ AB=\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}\right)\\
AF'+F'B&=8-\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}\\
&=8-\frac{4(m^2+1)-12}{m^2+4}\\
&=8-\left(4-\frac{12}{m^2+4}\right)\\
&=4+\frac{12}{m^2+4}
\end{aligned}
$$

$\Uparrow$ $\dfrac{4(m^2+1)}{m^2+4}$ のように分母と分子の次数が同じ、または分子の方が次数が高い場合、次数下げを行うんだったんだよね。今回もそれに従って変形しました。

＊ここからは、$4+\dfrac{12}{m^2+4}$ の最小値を考えます。$\dfrac{12}{m^2+4}$ は分母分子ともに正なんだよね。このとき、分子が 12 で定数なので、分母が最小となるとき文数全体としては最大となります。m^2+4 は $m=0$ のとき最小となるので、分数全体としては $m=0$ のときさ最大となります。

よって、$AF+F'B$ は $m=0$ のとき最大値 **7** をとる。

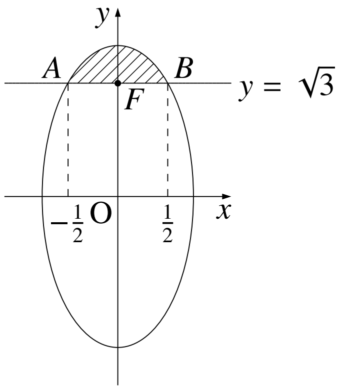
【（４）の解答】

＊これは何も考えることなく上から下を引くことで求める面積の問題です。定積分の計算が少し特殊です。ただ、よく出てくる定積分の計算なので、当然のようにできないとダメですよ。

$m=0$ のとき、l は $y=\sqrt{3}$ である。

楕円 C と直線 l の交点の x 座標を求める。

$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ に $y = \sqrt{3}$ を代入すると、$x^2 + \dfrac{3}{4} = 1$ つまり $x = \pm\dfrac{1}{2}$ となる。よって、グラフは以下のようになる。



$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ より $y = \pm 2\sqrt{1-x^2}$ となる。$y \geqq 0$ のとき $y = 2\sqrt{1-x^2}$

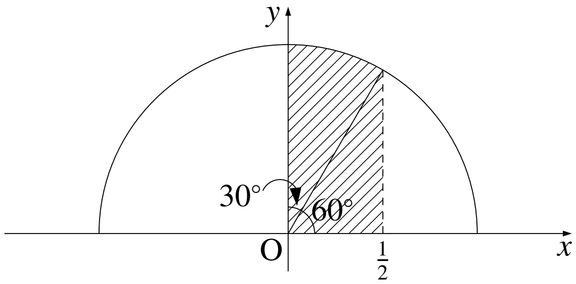
＊求める部分はあきらかに x 軸に関して対称だよね。偶関数・奇関数を使ってもいいけど、最初から「対称性より」とかいて進めてもらってもいいですよ。

D の面積を S とする。対称性より

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{3})\,dx \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}\,dx
\end{aligned}
$$

＊ここから定積分を計算していきます。$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ の計算は、$x = \sin\theta$ や $x = \cos\theta$ と置換しても解けますが、円を利用した方がラクなんだよね。これで解いていきます。

ここで、$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}$ を計算する。$y = \sqrt{1-x^2}$ のグラフは、原点を中心とする円の $y \geqq 0$ の部分であるので、$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ は下記の斜線部の面積と一致する。



$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ◀ (おうぎ形の面積)+(三角形の面積) より！

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

また、

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}\,dx$$

$$=\left[\sqrt{3}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より

$$S=4\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx-2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\,dx$$

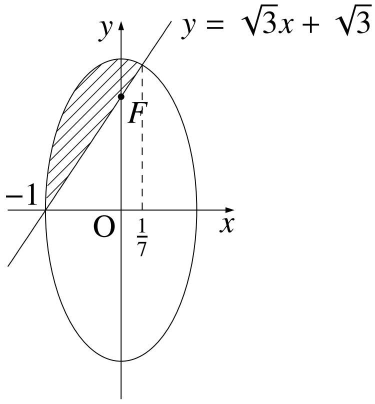
$$=4\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\left(\because\ \int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8},\ \int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

【(5) の解答】

＊この問題は簡単ですよ。外側の楕円を回転したときにできる回転体の体積から、内側の円錐の回転体の体積を引くだけです



$m = \sqrt{3}$ のとき、l は $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ となる。

$y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ を $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ に代入をする。

$$x^2 + \frac{(\sqrt{3}x + \sqrt{3})^2}{4} = 1$$

$$4x^2 + 3x^2 + 6x + 3 = 4$$

$$7x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$(x+1)(7x-1) = 0$$

$$x = 1, \frac{1}{7}$$

$x = \dfrac{1}{7}$ のとき、$y = \dfrac{8}{7}\sqrt{3}$ となる。立体の体積を V とする。

$$V = \int_{-1}^{\frac{1}{7}} \pi(2\sqrt{1-x^2})^2\,dx - \frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{8}{7}\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{8}{7}$$

$$= 4\pi\int_{-1}^{\frac{1}{7}}(1-x^2)\,dx - \left(\frac{8}{7}\right)^3\pi$$

$$= 4\pi\left[x - \frac{1}{x}{}^{3}\right]_{-1}^{\frac{1}{7}} - \left(\frac{8}{7}\right)^3\pi$$

$$= 4\pi\left\{\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3 + 1 - \frac{1}{3}\right\} - \left(\frac{8}{7}\right)^3\pi$$

$$= 4\pi\left\{\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3 + \frac{2}{3}\right\} - \left(\frac{8}{7}\right)^3\pi$$

$$= \frac{4\cdot3\cdot7^2 - 4 + 4\cdot2\cdot7^3 - 3\cdot8^3}{3\cdot7^3}\pi$$ ◀ 通分をした！

$$= \frac{588 - 4 + 2744 - 1536}{3\cdot7^3}\pi$$

$$= \frac{1792}{3\cdot7^2}\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{256}{147}}\pi$$ ◀ 7で約分をした！これが答え !!

＊通分をして計算していったのですが、計算が非常に煩雑でした。こういう計算のときはバカ正直に計算をするのではなく、「何か簡単な方法はないかな？」と常に考えるようにしてください。数字のみの計算でも、因数分解を利用したらラクになることが多いです。

ただ、今回はラクな方法が存在しなさそうでした。ですから、フツーに計算をしました。実際の大学受験でも、このように計算が非常に煩雑というかメンドウな場合が多々あります。

嫌がらせ？のように感じますが、落ち着て解くようにしてください。計算は、とにかく演習を繰り返す。それしかできるようになる方法はないですよ。頑張ってください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司