

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅲの「積分」 難易度：「標準」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

関数 $f(x)$ は微分可能で

$$f(x) = x^2 e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t) dt$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$, $f'(0)$ を求めよ。
- (2) $f'(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

【(1) の解説】

まずは、 $f(0)$ を求めるね。これは、簡単だよ。

$$f(0) = 0^2 e^{-0} + \int_0^0 e^{t-0} f(t) dt \text{ です。}$$

左側の $0^2 e^{-0}$ は0になるし、右側の定積分 $\int_0^0 e^{t-0} f(t) dt$ の値は0です。

これは、 $\int_a^a f(x) dx = 0$ となる公式を使っただけですよ。積分区間が上下同じときは定積分の値は0になります。

だから、 $f(0) = 0$ です。

次に、 $f'(0)$ を求めます。これは、数学 II で勉強をした微分の公式を使います。

微分の公式

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (\text{ただし、} a \text{ は定数})$$

これって難しく感じている人が多いけど、大したことないですよ。

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ をよく見て欲しいんだけど、これは被積分関数の $f(t)$ のところを x にしたらいいだけですよ。

だから、例えば $\frac{d}{dx} \int_3^x (2t^2 + 3t) dt$ だったら、被積分関数の $2t^2 + 3t$ の t のところを x にして、 $\frac{d}{dx} \int_3^x (2t^2 + 3t) dt = 2x^2 + 3x$ となります。

単純に t のところを x に置き換えたらいいいだけですよ。簡単だよな。

でも、ちょっと気を付けないといけないことがあります。

$\frac{d}{dx} \int_0^x e^{t-x} f(t) dt$ は被積分関数の t を x にして、 $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{t-x} f(t) dt = e^{x-x} f(x)$ とする人がいるけど、これはダメだからね。

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ の公式を見て欲しいけど、これが使えるのは被積分関数が t の式でないとダメなんだよね。でも、今回の $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{t-x} f(t) dt$ は被積分関数に t だけでなく x が含まれています。

だから、このまま微分することはできませんよ。例えば、 $\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx$ と x で積分のときは x に関係のない定数はインテグラルの外にだすことができるよね。

今回の場合、 $\int_0^x e^{t-x} f(t) dt = \int_0^x e^{-x} \cdot e^t f(t) dt$ と変形でき、さらに今回の場合 dt と t で積分なので、 t に関係のない e^{-x} はインテグラルの外に出すことができます。

これで、 $\int_0^x e^{-x} \cdot e^t f(t) dt = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$ と変形できます。こうしたら被積分関数が x を含まない t のみの式になるから $\frac{d}{dx} \int_0^x e^t f(t) dt = e^x f(x)$ と微分することができますよ。

ただ、 $e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$ は積の形になっているので微分をするときに積の微分の公式を使わないとダメですよ。「こんなところで積の微分の公式が出てくるの？」なんて思う人がいます。

でも、この形は結構よく出てきますよ。解けるようになっておいてくださいね。それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】

$$f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t) dt \\ &= x^2 e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + e^{-x} \cdot e^x f(x) \quad \blacktriangleleft \text{2つも積の微分の公式を使って微分をした!} \\ &= 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 2 \cdot 0e^{-0} - 0^2e^{-0} - e^{-0} \int_0^0 e^t f(t) dt + f(0) \\
 &= 0 \quad (\because f(0) = 0)
 \end{aligned}$$

【(2) の解答】

* 「どうしようかな?」と少し考えるけど、こういった問題はうまい具合に設問自体が作られていることが多いですよ。

今回も (2) で求めた $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + f(x)$ に、問題文で与えられている $f(x) = x^2e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t) dt$ を代入したらうまい具合に解けてしまいます。

(1) より

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + f(x) \\
 &= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + x^2e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t) dt \quad \left(\because f(x) = x^2e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t) dt \right) \\
 &= 2xe^{-x}
 \end{aligned}$$

↑ 少し気付きにくいけど、うまい具合にすべて打ち消しあてられています。

【(3) の解答】

(2) で求めた $f'(x) = 2xe^{-x}$ を積分して $f(x)$ を求めます。

そのときに積分定数の C が出てきます。この C は (1) で求めた $f(0) = 0$ より求めることができます。

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int 2xe^{-x} dx \\
 &= \int 2x \cdot (-e^{-x})' dx \\
 &= 2x \cdot (-e^{-x}) + \int 2e^{-x} dx \\
 &= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

(1) より $f(0) = 0$ よって $f(0) = -2 + C = 0$ つまり $C = 2$

以上より、 $f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2$

今回の問題はどうでしたか？こういった問題はよく出てきますよ。少し(2)で戸惑った人もいるかもしれません。

ですが、うまい具合に解けるように作ってくれています。「うまくいくかどうかわからないけど、とりあえずやってみる」ということが重要です。

当然、それで解けたらOKですし、解けない場合、そこでまた新たな解法考えます。それでは、がんばってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司