「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：「数学 III の積分」　　難易度：「発展」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

-問題-

関数 $f(x)$ を偶関数とするとき、次の問いに答えよ。ただし、a は正の定数である。

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$ を示せ。

(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x^2\cos x + e^x}{e^x+1}\,dx$ を求めよ。

【（１）の解説】

やや本格的な入試問題ですよ。こういった問題を解けるようになっておいてくださいね。

入試問題、特有の考え方があるので、それを順をおってひとつずつ解説していきます。

説明が長いです。ですから「説明が少しくどい！」と思う人もいるかもしれません。ただ、理解して欲しいと思って、少しくどめに解説しています。これを読めば、数学の問題の取り組み方が分かってくると思います。

「くどいなぁ」なんて思わずに、読んでもらえればと思います。

問題に進む前に、まずは偶関数・奇関数について解説しておきます。

偶関数と奇関数

$f(x)$ が偶関数のとき、$f(-x) = f(x)$ が成立する。また、$y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である。

$g(x)$ が奇関数のとき、$g(-x) = -g(-x)$ が成立する。また、$y = g(x)$ のグラフは原点に関して対称である。

偶関数と奇関数

$f(x)$ が偶関数、$g(x)$ が奇関数のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \qquad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$$

*定積分の計算で、積分区間が $-a$ から a のとき、「偶関数・奇関数を使うのかな？」と気づけるようになっておいてくださいね。

もちろん、積分区間が $-a$ から a であったとしても、必ずしも偶関数・奇関数が使える訳ではないですよ。ただ、偶関数・奇関数を使えた場合、計算が圧倒的にラクになります。常に意識するようにしてください。

例えば、$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos x + 1}\,dx$ なんて複雑な定積分の計算です。このとき、積分区間が $-\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{\pi}{3}$ を見て、「あっ、これは偶関数・奇関数を使うのかな？」と気づいてくださいね。

あと、意味を考えたら分かると思うけど、次のことも覚えておいてくださいね。

偶関数と奇関数について

$f_1(x)$ と $f_2(x)$ が偶関数、$g_1(x)$ と $g_2(x)$ が奇関数

このとき、

$f_1(x) \pm f_2(x)$ は偶関数（$\Leftarrow$ 偶関数どうしの和・差でできる関数は偶関数）

$g_1(x) \pm g_2(x)$ は奇関数（$\Leftarrow$ 奇関数どうしの和・差でできる関数は奇関数）

$f_1(x)f_2(x), \ \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$ は偶関数（$\Leftarrow$ 偶関数どうしの積・商でできる関数は偶関数）

$g_1(x)g_2(x), \ \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}$ は偶関数（$\Leftarrow$ 奇関数どうしの積・商でできる関数は偶関数）

$f_1(x)g_1(x), \ \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ は奇関数（$\Leftarrow$ 偶関数と奇関数の積・商でできる関数は奇関数）

上記は意味を考えたらすぐに分かると思いますよ。奇関数どうしの積・商は偶関数になるから気をつけてね。念のために証明しておくね。ここでは、奇関数どうしの積が偶関数になるということを示します。

【奇関数どうしの積が偶関数になることの証明】

$f(x), g(x)$ ともに奇関数であるとする。
$\Uparrow$ 奇関数なので、$f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$ が言えますよ。

$F(x) = f(x)g(x)$ とする。$F(x)$ が偶関数であることを示す。
$F(-x) = F(x)$ が成立したら、$F(x)$ が偶関数であることを示したことになります。

$$
\begin{aligned}
F(-x) &= f(-x)g(-x) \\
&= \{-f(x)\}\{-g(x)\} \quad (\because \quad f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)) \\
&= f(x)g(x) \\
&= F(x)
\end{aligned}
$$

よって、$F(-x) = F(x)$ が成立する。以上より、$F(x)$ は偶関数である。（証明終わり）

一応、奇関数どうしの積が偶関数であることを示しました。でも、マイナスどうしの積がプラスになるということを考えると、奇関数どうしの積でできる関数が偶関数になるということはあきらかだよね。それでは、問題に戻ります。

今回は、$\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ を示せなんだよね。右辺は変形できそうにないので、とりあえず左辺を変形していくことにするね。

左辺を見てみると、$\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ となっています。積分区間が $-a$ から a だから、とりあえず「偶関数・奇関数が使えるのかな？」と考えないとダメだったんだよね。

で、被積分関数見てみると $\dfrac{f(x)}{e^x+1}$ は分子の $f(x)$ は偶関数ってなってるけど、分母の e^x+1 は偶関数でも奇関数でもないよね。だから、この問題の場合偶関数・奇関数は（今の段階では）使えません。

で、偶関数・奇関数以外の解法で解かないといけないんだけど $\cdots$ 。とりあえず、以下のように変形します。

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx = \int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx + \int_{0}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$$

とりあえず上記のように変形できることはわかるよね。で、なぜこう式変形したのかというと、今回は等式の証明です。だから、左辺を変形したら右辺と一致してくれたら証明終了なんだよね。

こういった、<u>等式の証明のときは（余計なものが出てくるかもしれないけど）とりあえず一部分でも一致するように変形する</u>、ということがポイントです。

今回の問題の場合、左辺と右辺が一致するにはとりあえず積分区間が同じでないとダメなんだよね。右辺の積分区間は 0 から a です。だから、左辺の方も積分区間が 0 から a が出てくるような変形をしました。

こういう変形をすると、「でも、こう変形すると片方の定積分は 0 から a だけど、もうひとつの方が $-a$ から 0 となっているのでうまくいかないのでは？」という人がいます。

確かにそうです。でも、当たり前ですけど等式の証明って成立するからこそ出題されるんだよね。で、今回のように余計なものが出てきたとしても、一方だけでも強引に一致するように変形します。

そうすると、残った部分も打ち消しあったりしてうまいこといくようになっていますよ。この考え非常に重要ですよ。覚えておいてくださいね。

で、ここから続きです。今、左辺を $\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ と変形しました。

２つの定積分が出てきています。右辺を見てみると積分区間が 0 から a なんだよね。だから、左辺の２つの定積分のうち積分区間が 0 から a ではない方、つまり $\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ をなんとか積分区間が 0 から a にすることはできないかな？と考えます。

結論から言えば、$x=-t$ と置換します。そうすると、積分区間が 0 から a になってくれます。この置換はよく出てくるので覚えておいてくださいね。

＊ちょっと、ひつこいけど、また話しておくね。こういうふうにすると、「積分区間が一致することはわかりました。でも、積分区間が一致したとしても左辺と右辺が一致してくれるかどうかわからないんじゃないですか？」と質問を受けることもあります。

確かにそうですよ。ただ、等式の証明ってかならず等式が成立しているから証明できるんです。こういうふうに、一部分でも一致するように強引に変形します。そうすると、残った部分もうまい具合に一致してくれます。

もし、一致しなければ、そこで別の方法を考えればいいですよ。ただ、等式の証明の場合、一部分でも強引にそろえたら、うまく解けてしまうということがほとんどです。

$\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ の左側の定積分 $\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ の積分区間を 0 から a にするために $x=-t$ と置換します。

$x = -t$ のとき、$dx = -dt$

x	$-a \to 0$
t	$a \to 0$

$$\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^x + 1}\,dx$$
$$= \int_{a}^{0} \frac{f(-t)}{e^{-t} + 1}\,(-dt)$$
$$= \int_{0}^{a} \frac{f(-t)}{e^{-t} + 1}\,dt$$ ◀ 積分区間を反対にした！
$$= \int_{0}^{a} \frac{f(t)}{e^{-t} + 1}\,dt \quad (\because \ f(x) \text{は偶関数より} f(-t) = f(t))$$

とりあえず、ここまで変形できたよね。で、$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$ が言えます。

$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$ がなぜ成立するか分からないという人がいます。具体例で説明すれば分かりやすいと思うので、簡単な例をあげてみます。

例えば $\int_1^2 x^2\,dx$ も $\int_1^2 t^2\,dt$ も計算したら同じ値になるよね。これで、$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$ が成立することに納得できたと思います。この式変形たまに使うので覚えておいてくださいね。

で、先ほど $\int_0^a \frac{f(t)}{e^{-t}+1}\,dt$ まで導きました。ここで、$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$ この公式を使うことで、$\int_0^a \frac{f(t)}{e^{-t}+1}\,dt = \int_0^a \frac{f(x)}{e^{-x}+1}\,dx$ が言えるよね。

これで、左辺全体に戻ります。

今、左辺は $\displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{e^{-x}+1}\,dx + \int_0^a \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ とまで変形できました。この場合、２つの定積分の和になっているけど、２つとも積分区間が同じなんだよね。こんなときは、数学IIで勉強した公式の $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx$ を使うことが多いです。

で、これを使うと $\displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{e^{-x}+1}\,dx + \int_0^a \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx = \int_0^a \left\{\frac{f(x)}{e^{-x}+1} + \frac{f(x)}{e^x+1}\right\} dx$ と変形できます。

上記を計算するためには $\dfrac{1}{e^x+1} + \dfrac{1}{e^{-x}+1}$ を計算しないといけません。分数どうしの足し算だから、「通分をしよう」ということで分母を $(e^x+1)(e^{-x}+1)$ とでもそろえようかな？と考える人がいます。

もちろん、それでもできないことはないですが、もっと便利な方法があります。たまに出てくるので覚えておいてくださいね。

有名な計算

$\dfrac{1}{e^x+1} + \dfrac{1}{e^{-x}+1}$ は、右側の $\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ に $\dfrac{e^x}{e^x}$ をかけると分母が e^x+1 となり通分できる !!

$$\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{e^{-x}+1}$$
$$= \frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{e^{-x}+1} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$
$$= \frac{1}{e^x+1} + \frac{e^x}{1+e^x}$$

⇑ $e^x \cdot e^{-x} = 1$ であることに注意！これで、分母は両方とも $1+e^x$ でそろってる !!

$$= \frac{1+e^x}{1+e^x}$$

$=1$ ◀ 分母分子ともに $1+e^x$。約分して１です。

＊上記の式変形なんて、知らないと思いつけないと思いますよ。僕も、最初のうちは「こんなの気づくの絶対にムリ！」なんてじゃっかんキレていました（笑）

数学って、よほど頭のいい人以外は解法を覚えていかないとダメですよ。でも、解法を覚えて言えば、数学がそれほど得意でなくてもできるようになります。頑張ってくださいね

ここまできたら、証明できると思います。それでは、解答に進みます。

【(１）の解答】

$$(\text{左辺}) = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx = \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$$

ここで、

$\displaystyle\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ を考える。

$x = -t$ と置換する。$x = -t$ のとき、$dx = -dt$

x	$-a \to 0$
t	$a \to 0$

$$\int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$$

$$= \int_{a}^{0} \frac{f(-t)}{e^{-t}+1}\,(-dt)$$

$$= \int_{0}^{a} \frac{f(-t)}{e^{-t}+1}\,dt$$ ◀ 積分区間を反対にした！

$$= \int_{0}^{a} \frac{f(t)}{e^{-t}+1}\,dt \quad (\because \quad f(x) \text{ は偶関数})$$

$$= \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}\,dx$$

$\Uparrow \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ の公式より、$\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{f(t)}{e^{-t}+1}\,dt = \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}\,dx$ が成立します。上記のように、何も書かずにいきなり変形してもらって大丈夫ですよ。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx \\
&= \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}\,dx + \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx \quad \left(\because \ \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx = \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}\,dx\right) \\
&= \int_{0}^{a} \left\{ \frac{f(x)}{e^{-x}+1} + \frac{f(x)}{e^x+1} \right\} dx \\
&= \int_{0}^{a} \left\{ \frac{f(x)}{e^{-x}+1} \cdot \frac{e^x}{e^x} + \frac{f(x)}{e^x+1} \right\} dx \\
&= \int_{0}^{a} \left\{ \frac{e^x f(x)}{1+e^x} + \frac{f(x)}{e^x+1} \right\} dx \\
&= \int_{0}^{a} \frac{\cancel{(e^x+1)}\, f(x)}{\cancel{1+e^x}}\,dx \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,dx = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

以上より、$\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ が成立する。（証明終了）

【（２）の解説】

まず、受験問題の鉄則として、次のことを覚えておいてください。

大学受験の問題の考え方

大学受験の問題で（１)、（２）となっているとき、（２）を解くときは（１）を使ったり、ヒントにして解いていくことが多い !!

今回の問題は、（１）を使って解くというのはまあ気づきやすいよね。ただ、気づきにくいときもあります。

そんなときでも、（１)、（２）となっているときは「ひょっとしたら（１）を使うのかな？」と考えられるようになっておいてくださいね。そうすると、気づきにくい問題でも気づけるようになりますよ。

それでは、今回の問題に進むね。

（１）で $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ ってなっていたけど分子が偶関数なんだよね。だから、偶関数のときは（１）で示した式を使うことができます。

受験問題に慣れている人だと「ああ、（１）の結果を使うのね …」なんてなめてかかる人がいます。でも、気を付けてね。これを使えるのは分子が偶関数のときです。

で、（２）で与えられた式を見てみると $\int_{-a}^{a} \frac{x^2\cos x + e^x}{e^x+1}\,dx$ の分子は $x^2\cos x + e^x$ は偶関数ではないよね。だから、この状態では（１）の結果を使うことはまだできないですよ。

でも、よく見てみると $x^2\cos x$ は偶関数（＊ $x^2, \cos x$ とも偶関数、偶関数どうしの積でできる関数も偶関数）です。だから、分けたら、こっちのほうは（１）の結果を使えます。

後は、単なる計算なので解答に進むことにするね。

【（２）の解答】

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^2\cos x + e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{x^2\cos x}{e^x+1}\,dx + \int_{-a}^{a} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

＊ここから、$\int_{-a}^{a} \frac{x^2\cos x}{e^x+1}\,dx$ と $\int_{-a}^{a} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ の定積分をそれぞれ計算します。

ひとつ目は（１）の結果を使って計算して、ふたつ目は簡単に定積分の計算ができるタイプです。

ここで、$x^2\cos x$ は偶関数である。

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^2 \cos x}{e^x + 1}\, dx$$

$$= \int_0^a x^2 \cos x\, dx \quad (\because（１）の結果より)$$

＊ここからは単に部分積分を２回するだけです。

$$= \int_0^a x^2 (\sin x)'\, dx$$

$$= \left[x^2 \sin x \right]_0^a - \int_0^a 2x \sin x\, dx$$

$$= a^2 \sin x + 2 \int_0^a x (\cos x)'\, dx$$

$$= a^2 \sin a + 2 \left[x \cos x \right]_0^a - 2 \int_0^a \cos x\, dx$$

$$= a^2 \sin a + 2a \cos a - 2 \left[\sin x \right]_0^a$$

$$= a^2 \sin a + 2a \cos a - 2 \sin a$$

＊次に、$\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$ を計算します。今回のように、被積分関数が分数のときは $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \log|f(x)| + C$ の公式を使うことが多いです。

被積分関数が分数のときは、この公式を使えるかどうかまず確認をするクセをつけておいてください。

$$\int_{-a}^{a} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$=\int_{-a}^{a} \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx \blacktriangleleft \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \text{ を使える形になった！}$$

$$=\Big[\log|e^x+1|\Big]_{-a}^{a}$$

$$=\log|e^a+1|-\log|e^{-a}+1|$$

$$=\log(e^a+1)-\log(e^{-a}+1) \quad (e^a+1>0,\, e^{-a}>0 \text{ より } |e^a+1|=e^a+1,\, |e^{-a}+1|=e^{-a}+1)$$

$$=\log\frac{e^a+1}{e^{-a}+1}$$

$$=\log\left(\frac{e^a+1}{e^{-a}+1}\cdot\frac{e^a}{e^a}\right)$$

$$=\log\frac{e^a\cancel{(e^a+1)}}{\cancel{1+e^a}}$$

$$=\log e^a$$

$$=a$$

＊また、$\dfrac{1}{e^{-a}+1}$ の分母分子に e^a をかけるという式変形が出てきたね。この式変形はよく出てきます。このくらいサクッとできるようになっておいてくださいね。

よって、$\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{x^2\cos x}{e^x+1}\,dx+\int_{-a}^{a}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\boldsymbol{a^2\sin a+2a\cos a-2\sin a+a}$

これで、今回の問題は終わりです。たったい 1 問だったけど、解説長かったよね。

中には「こんなの知っているよ」なんて思うこともあったかもしれません。全員を対象にして書いているので、少し説明が長いと思った人もいると思います。

でも、数学の問題の考え方を丁寧に説明したつもりです。「あっ、数学のできる人って、問題を解くときにこういうふうに考えているんだな」と少しでも参考になれば嬉しいです。

それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司