「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

---

問題

１辺の長さが２である正５角形$ABCDE$において、対角線の長さを$t$、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{q}$とする。

(i) 対角線の長さは$t=$ $\boxed{ア}$ である。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$を$\vec{p}$と$\vec{q}$で表すと、$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=$ $\boxed{イ}$ である。

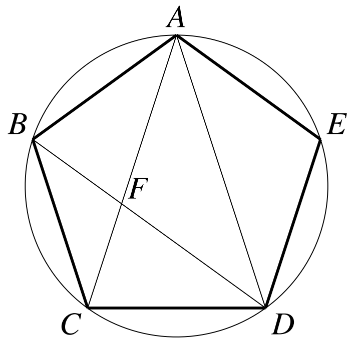
(iii) 内積$\vec{p}\cdot\vec{q}$の値を計算すると $\boxed{ウ}$ となる。

(久留米大学医学部)

**【解答】**

(i) ＊対角線を求める問題です。５角形の対角線を求める問題は受験でもよく出題されます。解法を覚えておいてくださいね。

＊まずは正五角形の対角線の長さを求めます。正五角形の対角線の長さはベクトルを使う解法、三角関数を使って解く解法などいくつかありますが、今回は相似で解いていくことにします。誘導も何もないときは、相似で解くのが一番オーソドックスな解法だと思いますよ。




上図のように、対角線$AC$と$BD$の交点を$F$とする。正五角形のひとつの内角は$108°$

である。このことより $\angle\mathrm{BAC} = 36^\circ, \angle\mathrm{ABF} = 72^\circ, \angle\mathrm{BCA} = 36^\circ$ となる。
⇑ 正五角形は円に内接しています。$AB = BC = CD = DE = EA$ より、これらの円周角はすべて等しいです。このことより、上記のことが言えます(中学生の内容だから大丈夫だよね？)。

$\triangle\mathrm{ABC}$ で三角形の内角の和が $180^\circ$ より、$\angle\mathrm{AFB} = 180^\circ - \angle\mathrm{FAB} - \angle\mathrm{ABF} = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ である。よって、$\angle\mathrm{ABF} = \angle\mathrm{AFB}$ より $AB = AF$ となる。

2 角相当より $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BFC}$ である。$CF = x$ とする。


⇑ 頭の中でできる人はわざわざ描き出さなくてもよいです。ですが、僕は頭の中で想像するのが苦手です。ですから、相似のときは必ずこういうふうに簡単に描き出すようにしています。そうした方が、どの辺とどの辺が対応するか？が一見して分かるので落ち着いて解くことができます。

相似な図形では対応する辺の比が等しいので

$$AB : AC = BF : BC$$
$$2 : (2 + x) = x : 2$$
$$x(x + 2) = 4$$
$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

解の公式より、$x = -1 \pm \sqrt{1+4} = -1 \pm \sqrt{5}$ となる。$x > 0$ より $x = -1 + \sqrt{5}$ である。よって、対角線の長さは $2 + x = \mathbf{1 + \sqrt{5}}$ である。

(ii) ＊正五角形のベクトルの問題もたまに出てくるので解法を覚えておいてくださいね。例えば対角線 $AC$ と辺 $ED$ は平行になります。このように正五角形の対角線は正五角形の辺と平行になります。この事実を使って解いていきます。

$\overrightarrow{\mathrm{ED}} = \overrightarrow{\mathrm{EC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{EC}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である。$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right| = 1 + \sqrt{5}$ より $\overrightarrow{\mathrm{EC}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる。

また、$\overrightarrow{\mathrm{BE}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ である。$\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = 1 + \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right| = 2$ より $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ となる。

$\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$ を有理化すると $-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ となるので $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ となる。

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{ED}} &= \overrightarrow{\mathrm{EC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BE}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \quad \blacktriangleleft\ \overrightarrow{\mathrm{BE}}\text{ の始点を }A\text{ にした！} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}(\vec{q} - \vec{p}) \quad \left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{p},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{q}\right) \\
&= \boldsymbol{\vec{p} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\vec{q}}
\end{aligned}
$$

(iii) ＊最後は内積を求める問題です。余弦定理でもよいですよが、今回は $\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = 1+\sqrt{5}$ の両辺を２乗して解いていくことにします。

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2 &= (1+\sqrt{5})^2 \\
\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 &= (1+\sqrt{5})^2 \quad \blacktriangleleft\ \text{始点を }A\text{ に変更した！} \\
\left|\vec{q} - \vec{p}\right|^2 &= (1+\sqrt{5})^2) \quad \left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{p},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{q}\right) \\
\left|\vec{q}\right|^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q} + \left|\vec{p}\right|^2 &= 6 + 2\sqrt{5} \\
2^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q} + 2^2 &= 6 + 2\sqrt{5} \quad (\because\ \left|\vec{q}\right| = \left|\vec{p}\right| = 2) \\
-2\vec{p}\cdot\vec{q} &= -2 + 2\sqrt{5} \\
\vec{p}\cdot\vec{q} &= \boldsymbol{1 - \sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

---

ベクトルの正五角形に関する問題でした。頻出問題です。解法をしっかりと覚えておいてくださいね。