

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

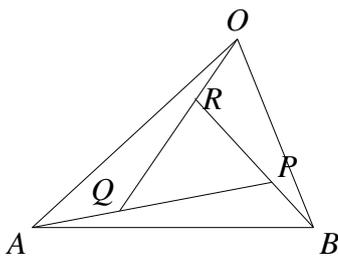
<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

### 問題

平面上の $\triangle OAB$ の内部に点 $P$ がある。線分 $AP$ を1:2に内分する点を $Q$ 、線分 $OQ$ を1:2に内分する点を $R$ とする。また、 $P$ は線分 $BR$ を1:2に内分しているものとする。

- (1)  $\vec{OQ}$ を $\vec{OA}$ ,  $\vec{OP}$ を用いて表せ。
- (2)  $\vec{OP}$ を $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ を用いて表せ。
- (3)  $\triangle OAB$ の面積と $\triangle OAP$ の面積の比を求めよ。
- (4)  $OA = 5$ ,  $OB = 3$ とする。 $\vec{OP}$ と $\vec{AB}$ が垂直であるとき、内積 $\vec{OQ} \cdot \vec{AB}$ の値を求めよ。

### 【問題の解答】



- (1) \*ただ単に内分の公式を使って解くだけの問題です。

$$\vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OP}$$

- (2) \*どのように解けば一番ラクになるか分かりにくい問題です。答えまでの経路はいくつかあります。どれでも大差ないのでとりあえず自分の好きなように解いていけばOKです。今から解答を書きますが、その解答にこだわる必要はないと思います。

$$(1) \text{ の } \vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OP} \text{ より } \vec{OP} = 3\vec{OQ} - 2\vec{OA} \cdots \textcircled{1}$$

\*  $\vec{OP}$  を求めるには  $\vec{OQ}$  が必要になります。まずは、 $\vec{OQ}$  を求めることをひとつの目標とします。

$$OR : RQ = 1 : 2 \text{ より } \vec{OR} = \frac{1}{3}\vec{OQ} \cdots \textcircled{2}$$

$BP : PR = 1 : 2$  より  $\vec{BR} = 3\vec{BP}$  である。

$$\vec{BR} = 3\vec{BP}$$

$$\vec{OR} - \vec{OB} = 3(\vec{OP} - \vec{OB})$$

$$\vec{OR} - 3\vec{OP} = -2\vec{OB}$$

$$\frac{1}{3}\vec{OQ} - 3\vec{OP} = -2\vec{OB} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\vec{OQ} = 9\vec{OP} - 6\vec{OB} \cdots \textcircled{3}$$

③ を ① に代入すると

$$\vec{OP} = 3(9\vec{OP} - 6\vec{OB}) - 2\vec{OA}$$

$$= 27\vec{OP} - 18\vec{OB} - 2\vec{OA}$$

$$26\vec{OP} = 2\vec{OA} + 18\vec{OB}$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{13}\vec{OA} + \frac{9}{13}\vec{OB}$$

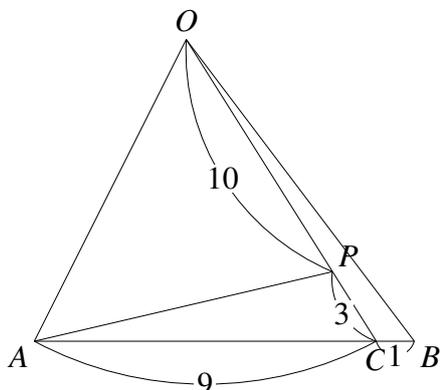
(3) \* 点  $P$  がどこにあるか? ということを考えて解いていく問題です。どの問題集にも掲載されているような有名問題なので解けないといけない問題ですよ。

$$\vec{OP} = \frac{1}{13}\vec{OA} + \frac{9}{13}\vec{OB}$$

$$= \frac{10}{13} \cdot \frac{\vec{OA} + 9\vec{OB}}{10}$$

ここで、 $\vec{OC} = \frac{\vec{OA} + 9\vec{OB}}{10}$  とする。点  $C$  は辺  $AB$  を  $9 : 1$  に内分する点であり、点  $P$

は線分  $OC$  を  $10:3$  に内分する点である。



$(\triangle OAC) = S$  とする。 $(\triangle OAP) = \frac{9}{10}S$  である。また、 $(\triangle OAP) = \frac{10}{13}(\triangle OAC) = \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{10}S = \frac{9}{13}S$  である。

よって、 $(\triangle OAB) : (\triangle OAP) = 13 : 9$  である。

- (4) \*これは単なる計算問題です。ただ、計算がかなり煩雑なので丁寧に解くようにしてくださいね。

$\vec{OP} \perp \vec{AB}$  より  $\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$  となる。

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\left(\frac{1}{13}\vec{OA} + \frac{9}{13}\vec{OB}\right) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = 0 \quad (\because \vec{OP} = \frac{1}{13}\vec{OA} + \frac{9}{13}\vec{OB})$$

$$(\vec{OA} + 9\vec{OB}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = 0 \quad \leftarrow \text{分数をなくした!}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} - |\vec{OA}|^2 + 9|\vec{OB}|^2 - 9\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$8\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -|\vec{OA}|^2 + 9|\vec{OB}|^2$$

$$= -5^2 + 9 \cdot 3^2 \quad (\because |\vec{OA}| = 5, |\vec{OB}| = 3)$$

$$= -25 + 81$$

$$= 56$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 7$$

\*  $\vec{OQ}$ が必要です。今から  $\vec{OQ}$  を求めることにします。

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OP} \quad (\because (1)) \\ &= \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{13}\vec{OA} + \frac{9}{13}\vec{OB}\right) \quad (\because (2) \text{ より } \vec{OP} = \frac{1}{13}\vec{OA} + \frac{9}{13}\vec{OB}) \\ &= \frac{9}{13}\vec{OA} + \frac{3}{13}\vec{OB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{OQ} \cdot \vec{AB} &= \left(\frac{9}{13}\vec{OA} + \frac{3}{13}\vec{OB}\right) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \quad (\because \vec{OQ} = \frac{9}{13}\vec{OA} + \frac{3}{13}\vec{OB}) \\ &= \frac{3}{13}\left(9\vec{OA} \cdot \vec{OB} - 9|\vec{OA}|^2 + 3|\vec{OB}|^2 - 3\vec{OA} \cdot \vec{OB}\right) \\ &= \frac{1}{13}\left(-9|\vec{OA}|^2 + 3|\vec{OB}|^2 + 6\vec{OA} \cdot \vec{OB}\right) \\ &= \frac{1}{13}(-9 \cdot 5^2 + 3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 7) \quad (\because |\vec{OA}| = 5, |\vec{OB}| = 3, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 7) \\ &= \frac{3}{13}(-3 \cdot 25 + 9 + 2 \cdot 7) \\ &= \frac{3}{13}(-75 + 9 + 14) \\ &= \frac{3}{13} \cdot (-52) \\ &= \mathbf{-12}\end{aligned}$$

---

入試問題としては比較的簡単な問題です。

ただ、まだ入試問題を解きなれていない人にとっては難しかったかもしれません。

こういった問題を解けるようになるには慣れるしかありません。一通り典型問題を理解したあとは、いろいろな大学の過去問に触れておくことが重要です。頑張ってください。