「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学B「ベクトル」　　難易度：「標準」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とし、$s = \dfrac{2}{2\sin\theta + 1}$ とおく。平面上の点 O, A, B は、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 2,\ \cos\angle\mathrm{AOB} = 2\theta$ を満たすとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $s < 1$ をみたす θ の範囲を求めよ。

(2) θ は (1) で求めた範囲を動くとする。さらに、線分 AB を $(1-s) : s$ に内分する点を C、線分 OB の中点を D とし、線分 AD と線分 OC の交点を P とする。このとき、$\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right|$ は θ の値によらないことを示せ。

【問題の解答】

(1) ＊これは単純に不等式を解くだけの問題です。

$$s < 1$$

$$\frac{2}{2\sin\theta + 1} < 1 \quad \left(\because \quad s = \frac{2}{2\sin\theta + 1}\right)$$

$$2 < 2\sin\theta + 1 \quad (\because \quad 2\sin\theta + 1 > 0)$$ ◀ 正をかけても不等号の向きは不変！

$$\sin\theta > \frac{1}{2}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}}$ である。

(2) ＊「$\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right|$ は θ の値によらないことを示せ」となっています。とりあえず $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ が必要なので、まず $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を問題で与えられて情報を使って求めることにします。

線分 AB を $(1-s);s$ に内分する点が C であるので $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおける。
また、線分 OB の中点が D であるので $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

＊点 P は線分 AD と線分 OC の交点です。つまり、点 P は線分 AD 上、かつ、線分 OC 上です。このことを使って解いていきます。

点 P は線分 OC 上の点である。k を $0\leqq k\leqq 1$ の実数として $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表せる。
⇑ 今回は、点 P は線分 OC 上です。線分なので $0\leqq k\leqq 1$ となります。

また、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=sk\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots$① と合わせる。

点 P は線分 AD 上の点である。点 P は線分 AD を $t:(1-t)$ (t は $0\leqq t\leqq 1$ の実数) に内分する点とする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と表せる。また、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots$② と表せる。

＊ここから ①, ② を使って係数を比較をします。ただ、係数比較をするには $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\neq 0$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\neq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\nparallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ という条件が必要だったよね (1 次独立のこと)。このことを丁寧に記しておかないと減点されますよ。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=1\neq 0$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=2\neq 0$ である。また、$\angle\mathrm{AOB}=2\theta$ であり $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{3}<\angle\mathrm{AOB}<\pi$ である。このとき、3 点 AOB は同一直線上にない、つまり $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\nparallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。
⇑ ここまでで $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が一次独立ということが言えました。ここから係数比較で解いていきます。

①, ② より $sk=1-t\cdots$③ かつ $k(1-s)=\frac{t}{2}\cdots$④ がいえる。

④ より $t = 2k(1-s) \cdots$ ④′ となる。④′ を ③ に代入をする。

$$sk = 1 - 2k(1-s)$$
$$sk = 1 - 2k + 2sk$$
$$sk - 2k = -1$$
$$(2-s)k = 1$$

(1) より $s < 1$ である。よって、$2 - s \neq 0$ である。$(2-s)k = 1$ の両辺を $2-s$ で割ると $k = \dfrac{1}{2-s}$ である。

＊ $s < 1$ のとき $2 - s > 1$ より $0 < k < 1$ を満たします。k は $0 \leqq k \leqq 1$ を満たさないといけません。$0 < k < 1$ のとき $0 \leqq k \leqq 1$ を満たしているよね。だから、解答にこのことを書いておいても OK です。

ただ、今回の場合 k は $k = \dfrac{1}{2-s}$ とただ一通りで表されているよね。もし、これが答えでないとすると k は存在しないとなってしまいます。こういった出題のされ方をしているとき「k が存在する」ということは言えていると判断してもらって OK です。ですから、今回は確認をしなてくも OK だと思います。丁寧にするには、確認をするようにしてください。

また、ここから t を求めてもらっても OK です。ただ、t は求めなくても $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は求められてしまいます。検算のため求めてもらってもよいですが、答えを求めるだけでは t を求める必要はないですよ。

$k = \dfrac{1}{2-s}$ を ① に代入をすると $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{s}{2-s}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1-s}{2-s}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \left(\frac{s}{2-s}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1-s}{2-s}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \\
&= -\frac{s}{2-s}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1-s}{2-s}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= -\frac{s}{2-s}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{s}{2(2-s)}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= \frac{s}{2-s}\left(-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)
\end{aligned}$$

⇑ たまたま $\dfrac{s}{2-s}$ でくくることができたから $\dfrac{s}{2-s}$ でくくっただけですよ (この方が計算がラクになる！)。ここから、$\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right|$ を求めて、それが θ によらない (つまり θ を

含まない定数になる！) ということを示していきます。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right|^2 = \left(\frac{s}{2-s}\right)^2\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\right)$$

$$= \left(\frac{s}{2-s}\right)^2\left(1^2 - 1\cdot 2\cdot\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cdot 1^2\right)\ \left(\because\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 1,\ \angle\mathrm{AOB} = 2\theta\right)$$

$$= \left(\frac{2}{2-s}\right)^2\left(\frac{5}{4} - 2\cos 2\theta\right)$$

ここで $s = \dfrac{2}{2\sin\theta + 1}$ であるので

$$2\sin\theta + 1 = \frac{2}{s}$$

$$2\sin\theta = \frac{2}{s} - 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4} - 2\cos 2\theta$$

$= \dfrac{5}{4} - 2(1 - 2\sin^2\theta)$ ◀ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ の２倍角の公式より！

$$= \frac{5}{4} - 2 + 4\sin^2\theta$$

$$= -\frac{3}{4} + 4\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right)^2\ \left(\because\ \sin\theta = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{4} + 4\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{3}{4} + \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s} + 1$$

$$= \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s} + 1$$

$$= \frac{s^2 - 4s + 4}{s^2}$$

$$= \left(\frac{s-2}{s}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right|^2 &= \left(\frac{2}{2-s}\right)^2\left(\frac{5}{4}-2\cos 2\theta\right) \\
&= \left(\frac{s}{2-s}\right)^2\left(\frac{s-2}{s}\right)^2 \quad \left(\because\ \frac{5}{4}-2\cos 2\theta = \left(\frac{s-2}{s}\right)^2\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right| > 0$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right| = 1$ である。よって、$\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right|$ は θ の値によらない。(証明終)

【注】
(2) は長かったよね。ただ、やっていることはごくごく簡単な計算ばかり。このくらいの計算は、国公立大学ならどこでも出題されますよ。最初のうちは圧倒されるかもしれませんが、「このくらい簡単！」と思えるようになっておいてくださいね。