「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 IIB「漸化式」　　難易度：「標準」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

(1) $a_1 = \dfrac{1}{3}$，$(2n+1)a_n = (2n-3)a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(2) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$$a_1 = 1,\quad a_2 = \frac{1}{2},\quad a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{8}a_n$$

＊問題文の解説で、「数列の極限のプリント」と載せています。このプリントをご覧になりたい方は、https://pro.form-mailer.jp/fms/23a8c354136097 からお申し込みください（無料です）。漸化式はすべての問題を網羅しています。

【（１）の解答】

＊両辺に真ん中のものをかけるタイプの漸化式です。忘れていた人は「数列の極限」の問題 34 を見ておいてください。

$$(2n+1) = (2n-3)a_{n-1}$$

$$(2n+1)(2n-1)a_n = (2n-3)(2n-1)a_{n-1} \cdots ①$$ ◀ 両辺に $(2n-1)$ をかけた！

ここで、$(2n+1)(2n-1)a_n = b_n$ とすると、① より $b_n = b_{n-1}$ が成立する。これより、b_n は定数数列である。また、$b_1 = (2\cdot1+1)(2\cdot1)\cdot a_1 = 3\cdot1\cdot\frac{1}{3} = 1$ より $b_1 = 1$

b_n は定数数列なので、$b_n = b_{n-1} = \cdots = b_1$ より $b_n = 1$ である。

$b_n = (2n+1)(2n-1)a_n$ より、$a_n = \boldsymbol{\dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}}$ となる。また、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{0}$ である。

【（2）の解答】

＊単なる隣接３項間の漸化式です (忘れていた人は「数列の極限」の問題 31 を参照)。ただ、特性方程式の解が無理数で値が汚いです。とりあえず、特性方程式の解を α,β として、最後に代入すれば書く量が減って簡単になると思います。

$a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{8}a_n \cdots$①

特性方程式より $x^2 = \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$ であり、この方程式を解くと $\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$ となる。$\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$，$\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ とおく。

このとき、① は $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と変形できる。これより、数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_{n+1}\}$ は初校 $a_2 - \alpha a_1$、公比 β の等比数列である。従って、$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} \cdots$② と変形できる。

また、① は $a_{n+1} - \beta a_n = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ と変形できる。これより、数列 $\{a_{n+1} - \beta a_{n+1}\}$ は初校 $a_2 - \beta a_1$、公比 α の等比数列である。従って、$a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} \cdots$③ と変形できる。

⇑上記の一連の流れはすべて暗記しています。もし、分からないという人は「数列の極限」の問題 31 で復習をしておいてください。

② − ③ より

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} \\ -) & a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} \\ \hline & (-\alpha+\beta)a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} \end{array}$$

ここで

$$-\alpha+\beta=-\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_2-\alpha a_1=\frac{1}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$a_2-\beta a_1=\frac{1}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

よって

$$(-\alpha+\beta)a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}a_n&=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^{n-1}-\frac{1-\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^{n}\\a_n&=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^{n}\right\}}\end{aligned}$$

$\left|\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}\right|<1$ より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^{n}=0$ である。よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\mathbf{0}$

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司