「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 IIB「三角関数　図形と方程式」　　難易度：「発展」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

方程式 $a\sin\theta + (a+1)\cos\theta = 1 \cdots ①$ を考える。
(1) ① が実数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。
(2) ① が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の区間に実数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

【（１）の解答】

＊（１）だけだと、三角関数の合成をしても解くことができます。ですが、（２）は三角関数の合成を使って解くことは難しいです。

そこで、解答のように言い換えて解いていくことにします。この言い換えはたまに出てくるので覚えておいてください。

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x, y) は、$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表されます。

$a\sin\theta + (a+1)\cos\theta = 1 \cdots ①$

$x = \cos\theta, y = \sin\theta$ とする。

① を満たす実数 θ は、x と y の連立方程式 $\begin{cases} ay+(a+1)x=1\cdots② \\ x^2+y^2=1\cdots③ \end{cases}$ の実数解の組 (x,y) によって、決定する。

よって、① が実数解をもつとき、連立方程式 ② かつ ③ が実数の組の解をもつ、つまり直線 ① と円 $x^2+y^2=1$ が共有点をもつ。

このとき、円の中心である点 $(0,0)$ から直線 ① までの距離が半径 (半径は１) 以下である。

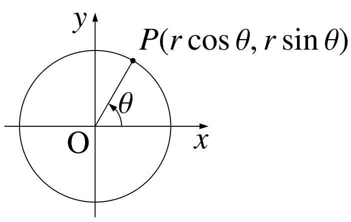
$$\begin{aligned}
\frac{|(a+1)\cdot 0+a\cdot 0-1|}{\sqrt{(a+1)^2+a^2}} &\leqq 1 \\
\frac{1}{\sqrt{(a+1)^2+a^2}} &\leqq 1 \\
\sqrt{(a+1)^2+a^2} &\geqq 1 \\
(a+1)^2+a^2 &\geqq 1 \\
2a^2+2a &\geqq 0 \\
a(a+1) &\geqq 0 \\
\therefore\ \boldsymbol{a\leqq -1,\ 0\leqq a}
\end{aligned}$$

◀ 両辺を２乗した！$A\geqq 0, B\geqq 0$ のとき、$A\geqq B \iff A^2\geqq B^2$ です。

【（２）の解説】

① が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の区間に実数解をもつための必要十分条件は、連立方程式 ② かつ ③ が $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ をみたす実数解の組をもつことです。

⇑ 円 $x^2+y^2=1$ 上の点を $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ としたときの θ は、原点と点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を結ぶ線分が x 軸の正方向となす角のことです (下図参照)。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき、x,y は $x\geqq 0, y\geqq 0$ を満たします。



⇑上図のように、線分 OP と x 軸の正の向きとなす角が θ です。

「連立方程式 ② かつ ③ が $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ をみたす実数解の組をもつ」を言い換える

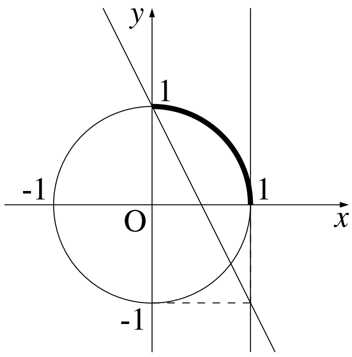
と、「直線 ① と円 ② が、$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ をみたす領域で共有点をもつ」です。

直線 ① について考えることにします。まず、直線 ① の方程式を a について整理すると $a(x+y)+x-1=0$ です。a についての恒等式とみなすと $x+y=0$ かつ $x-1=0$ つまり $x=1$ かつ $y=-1$ です。

このことより、直線 ① は a の値に関係なく、点 $(1,-1)$ を通ります。

あと、$a \fallingdotseq 0$ のとき直線の方程式は $y=-\dfrac{a+1}{a}x+1$ と変形できます。これより、$a \fallingdotseq 0$ のとき、直線 ① は、点 $(1,-1)$ を通り傾き $-\dfrac{a+1}{a}$ の直線です。

＊「当たり前だよ」と思える内容をタラタラと書きました。ただ、定数を含んだ直線は上記のように考えます。忘れている人も多いので、念のため丁寧に書いておきました。



点 $(1,-1)$ を通る直線と円が $x \geqq 0, y \geqq 0$ で共有点をもつときは、２点 $(1,-1),(0,1)$ を通る直線より、傾きが小さくなるときです。また、x 軸に垂直な直線のときも OK です。これを使って解いていきます。

【（２）の解答】

① が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の区間に実数解をもつとき、連立方程式 ② かつ ③ が $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ をみたす実数の組の解をもつ、つまり直線 ① と円 $x^2+y^2=1$ が $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ をみたす領域で共有点をもつ。

(i) $a = 0$ のとき

$a = 0$ のとき、直線 ① は $x = 1$ となる。このとき、直線 $x = 1$ は円 ② と点 $(1, 0)$ で共有点をもつので、適する。

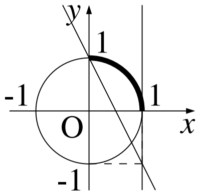
(ii) $a \neq 0$ のとき

直線 ① の方程式を a について整理すると $a(x + y) + x - 1 = 0$ となる。a についての恒等式とみなすと $x + y = 0$ かつ $x - 1 = 0$ つまり $x = 1$ かつ $y = -1$ となる。

つまり直線 ① は、a の値に関係なく点 $(1, -1)$ を通る。

また、直線 ① の方程式を y について整理すると $y = -\dfrac{a+1}{a}x + 1$ となる。このことより、直線 ① の傾きは $-\dfrac{a+1}{a}$ である。

直線 ① と円 ② が、$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ をみたす領域で共有点をもつとき



上図より、直線 ① が 2 点 $(1, -1), (0, 1)$ を通るときよりも傾きが小さくなる（傾きが等しいときも含む）。2 点 $(1, -1), (0, 1)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{1-0}{-1-1} = -2$ であるので、

$$-\frac{a+1}{a} \leqq -2$$

$$\frac{a+1}{a} \geqq 2$$ ◀ 両辺に -1 をかけた！

$$a^2 \cdot \frac{a+1}{a} \geqq 2a^2$$ ◀ 両辺に a^2 をかけた！

$$a(a+1) \geqq 2a^2$$

$$a(a-1) \leqq 0$$

$$0 \leqq a \leqq 1$$

$a \neq 0$ より、$0 < a \leqq 1$

以上より、求めるaの値の範囲は$a=0$または$0<a\leqq 1$つまり$\boldsymbol{0\leqq a\leqq 1}$である。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司