---

単元：数学 IIB「ベクトル　相加相乗平均」　　難易度：「発展」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

底面の正方形 $ABCD$ の１辺の長さが $\sqrt{2}$、高さが１の正四角錐 $O-ABCD$ を考える。ただし、正四角錐とは底面が正方形で、側面がすべて合同な二等辺三角形である角錐をいう。辺 $OC$ の中点を $M$、正方形 $ABCD$ の対角線の交点を $K$ とし、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。このとき

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ア}}},\ \ \vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{イ}}$$

である。
線分 $AM$ と平面 $OBD$ の交点を $N$ とするとき

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OK}}$$

である。
辺 $OB$ 上に点 $P$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(o < p \leqq 1)$ となるようにとり、辺 $OD$ 上に点 $Q$ を $a\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $(0 < q \leqq 1)$ となるようにとり、４点 $A, M, P, Q$ が同一平面上にあるようにする。

$p=1$ のとき $q = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

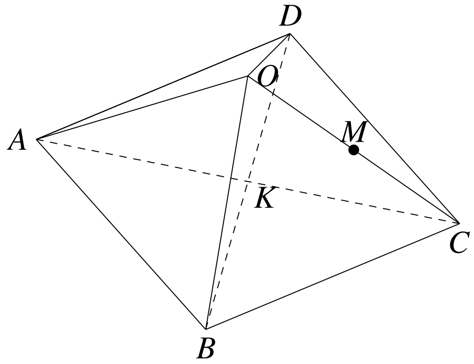
$p$ がとり得る最小値は $p = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

４点 $A, M, P, Q$ が同一平面上にある条件から、$p$ と $q$ の間には

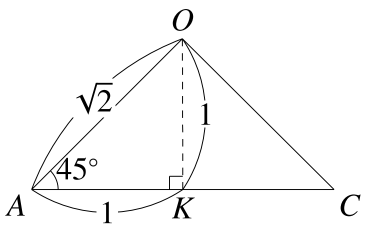
$$\boxed{\text{ケ}}\,pq = p+q$$

とうい関係が成り立つ。
線分 $PQ$ の長さの２乗は $PQ^2 = \boxed{\text{コ}}(p+q)^2 - \boxed{\text{サ}}\,pq$ と表される。$p+q$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であるから、線分 $PQ$ の長さは $p = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ のとき、最小値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとる。

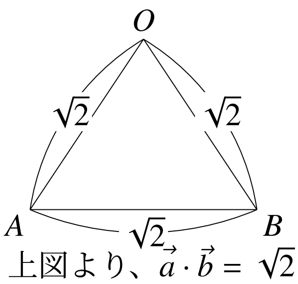
## 【問題の解答】




＊こういう立体図形の問題は、着目する平面や切断面で考えて平面図形で考えます。着目する平面図形は面倒くさがらず、簡単に図形を書いて求めた方が間違えにくいですよ。まずは、$|\vec{a}|$ つまり辺 $OA$ の長さを求めます。これは、切断面 $OAC$ で考えることができます。




上図より、$OA = \sqrt{2}$ となる。よって、$|\vec{a}| = \mathbf{\sqrt{2}}$ である。また、対称性より $OA = OB = \sqrt{2}$ となり、問題より $AB = \sqrt{2}$ より △OAB は下図のような正三角形となる。




上図より、$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 60° = \mathbf{1}$ である。

＊次に、$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を求めます。$N$ は、線分 $AM$ と平面 $OBD$ の交点ですが、対称性を考えると、$N$ は平面 $OAC$ 上にあり、線分 $AM$ と $OK$ の交点です。$M, K$ ともに中点なので、$N$ は △OAC の重心です。

点 $N$ は、$\triangle$OAC の重心と一致する。よって、$ON : NK = 2 : 1$ であるので、$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathbf{OK}}$ である。

＊ここからは、４点 $A, M, P, Q$ が同一平面上にあるという条件を使います。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AP}} + y\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と表せます。別に、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = x\overrightarrow{\mathrm{AM}} + y\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ としてもよいのですが、前者の方が簡単そうなので前者のようにすることにします。

これを使うためには、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が必要なので、まずはこれらを求めてから解いていくことにします。

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ◀ 四角形 $ABCD$ は正方形より $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を使った！

$= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$= \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\overrightarrow{\mathrm{OD}} = q(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$

４点 $A, M, P, Q$ が同一平面上にあるので、実数 $x, y$ を使って $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AP}} + y\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AP}} + y\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = x(\overrightarrow{\mathrm{OP\text{-}OA}}) + y(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$ ◀ 始点を $O$ にした！

$\dfrac{1}{2}\vec{x} - \vec{a} = x(p\vec{b} - \vec{a}) + y(q\vec{a} + q\vec{c} - q\vec{b} - \vec{a})$

$-\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c} = (-x + qy - y)\vec{a} + (xp - yq)\vec{b} + yq\vec{c}$

ここで、４点 $O, A, B, C$ が同一平面にないので
⇑ 空間ベクトルで両辺の係数比較ができるには、この条件をみたしていないとダメ !!

$-x + qy - y = -1 \cdots ①,\ \ xp - yq = 0 \cdots ②,\ \ yq = \dfrac{1}{2} \cdots ③$ が成立する。

$p = 1$ のとき ② は $x - yq = 0$ となる。③ の $yq = \dfrac{1}{2}$ より $x = \dfrac{1}{2}$ となる。

$x=\dfrac{1}{2}, yq=\dfrac{1}{2}$ を ① に代入すると、$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-y=-1$ つまり $y=1$ となる。$y=1$ を $yq=\dfrac{1}{2}$ に代入することにより、$q=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ となる。

＊次に $p$ がとり得る値の最小値を求めます。

③ を ①, ② に代入をして整理すると、① は $x+y=\dfrac{3}{2}\cdots$①′、② は $xp=\dfrac{1}{2}\cdots$②′ とする。

となる。よって、「①かつ②かつ③」であることと、「①′かつ②′かつ③」であることは同値である。

②′ より $x=\dfrac{1}{2p}$、③ より $y=\dfrac{1}{2q}$ となる。これらを ①′ に代入をすると、$\dfrac{1}{2p}+\dfrac{1}{2q}=\dfrac{3}{2}$ つまり $\dfrac{1}{p}=3-\dfrac{1}{q}$ となる。

$0<q\leqq 1$ であるので、$q\leqq 1$ がいえる。

$$
\begin{aligned}
q &\leqq 1\\
\frac{1}{q} &\geqq 1\\
-\frac{1}{q} &\leqq -1\\
3-\frac{1}{q} &\leqq 3-1\\
3-\frac{1}{q} &\leqq 2\\
\frac{1}{p} &\leqq 2 \quad \left(\because\ 3-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}\right)\\
p &\geqq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$p$ は $0<p\leqq 1$ をみたす実数なので、$p$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ である。

また、$\dfrac{1}{2p}+\dfrac{1}{2q}=3$ である。この等式の両辺に $2pq$ をかけて整理すると、$\boldsymbol{3pq=p+q}$ である。

＊次に、線分 $PQ^2$ の長さの２乗を求めます。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が分っているので、$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$ とやってもできます。ただ、$\angle\mathrm{BOD} = 90°$ であるので、それに気づければ、こっちで解く方がだいぶラクです。

$OB = \sqrt{2}, OD = \sqrt{2}, BD = 2$ であるので、$\angle\mathrm{BOD} = 90°$、つまり $\angle\mathrm{POQ} = 90°$ である。

$\triangle\mathrm{OPQ}$ で三平方の定理を用いると $PQ^2 = P^2 + OQ^2$ である。

$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= OP^2 + OQ^2 \\
&= \left|q\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + \left|q\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2 \\
&= (\sqrt{2}q)^2 + (\sqrt{2}p)^2 \\
&= 2p^2 + 2q^2 \\
&= \mathbf{2(p + q)^2 - 4pq}
\end{aligned}
$$

＊次に、$p+q$ の最小値を求めます。$p$ と $q$ には $p+q = 3pq$ という関係式がありました。これと、相加相乗平均を使って最小値を求めます。「こんな解き方はじめて見た。こんなことしてよいの？」と思える解き方かもしれません。

ですが、例えば $x+y \geqq a$($a$ は定数) が言えて、等号が成立することがあれば $x+y$ の最小値は $a$ ですよ。あまり出ない解き方ですが、自信をもってできるようになっておいてください。

$0 < p \leqq 1, 0, q \leqq 1$ なので相加相乗平均を適用すると $p+q \geqq 2\sqrt{pq}$ であり、等号が成立するのは $p = q$ のときである。また、$p+q = 3pq$ より、$p = q$ のとき

$p + p = 3p^2$ ◀ $p + q = 3pq$ に $q = p$ を代入した！

$2p = 3p^2$

$2 = 3p$ ($\because$ $p \fallingdotseq 0$ より、両辺を $p$ で割った)

$p = \dfrac{2}{3}$

$p+q \geqq 2\sqrt{pq}$

$3pq \geqq 2\sqrt{pq}$ $(\because \ \ p+q=3pq)$

$3\sqrt{pq} \geqq 2$ ◀ 両辺を $\sqrt{pq}$ で割った！

$9pq \geqq 4$ ◀ 両辺を２乗した！両辺ともに０以上なので、同値である

$3pq \geqq \frac{4}{3}$

$p+q \geqq \frac{4}{3}$ $(\because \ \ 3pq=p+q)$

$p+q \geqq \frac{4}{3}$ は $p=q=\frac{2}{3}$ のときに等号が成立する。よって、$p+q$ の最小値は $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$ である。

$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= 2(p+q)^2-4pq \\
&= 2(p+q)^2-\frac{4}{3}(p+q) \quad \left(\because \ \ pq=\frac{1}{3}(p+q)\right) \\
&= 2\left\{(p+q)^2-\frac{2}{3}(p+q)\right\} \\
&= 2\left\{(p+q)-\frac{1}{3}\right\}^2-\frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

$p+q \geqq \frac{4}{3}$ より、$PQ^2$ は $p+q=\frac{4}{3}$ のとき、最小値 $2-\frac{2}{9}=\frac{16}{9}$ となる。

$p=q$ であるので、$p=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ のとき最小となり、また $PQ>0$ より、$PQ$ の最小値は $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$ である。

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

## ルールを覚えれば誰でもできる！<br>あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

---

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司