「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 IIB「微分積分」　　難易度：「発展」

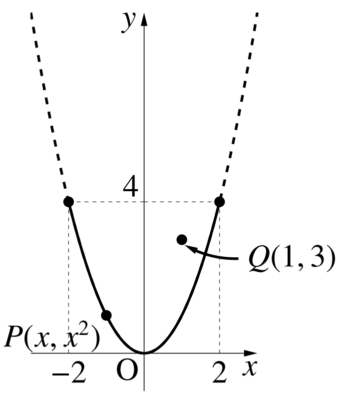
＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

座標平面上において、点 P は放物線 $y = x^2$ 上にあるとし、その x 座標は $-2 \leqq x \leqq 2$ をみたしているとする。また点 Q は $(1, 3)$ にあるとする。P と Q の距離が最大、最小となるときの P の x 座標はそれぞれ $-\dfrac{1}{2}$ 以上、$\dfrac{3}{2}$ 以下であることを示し、さらにそれらの小数第１位までを求めよ。

【問題の解答】



$P(x, x^2)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ とし、$PQ^2 = f(x)$ とする。

$f(x) = (x-1)^2 + (x^2-3)^2$ ◀ ２点間の距離の公式より！

$= x^4 - 5x^2 - 2x + 10$

$f'(x) = 4x^3 - 10x - 2$

$f''(x) = 12x^2 - 10$

$= 2(\sqrt{6}x - \sqrt{5})(\sqrt{6}x + \sqrt{5})$

＊１階微分だけではどうなるか分かりませんでした。そこで、２階微分をすることにより、$f'(x)$ がどうなるか？ということを考えていくことにしました。

$f'(-2) = -14, f'(2) = 10, f'\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{6}} - 2,\ f'\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = -\frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{6}} - 2$

⇑ 計算は単純にするだけなので、省略しました。

＊少し珍しいですが、$f'(x)$ の増減表を書きます。$y = f'(x)$ のグラフを描くことで、$f'(x)$ の符号を調べます。

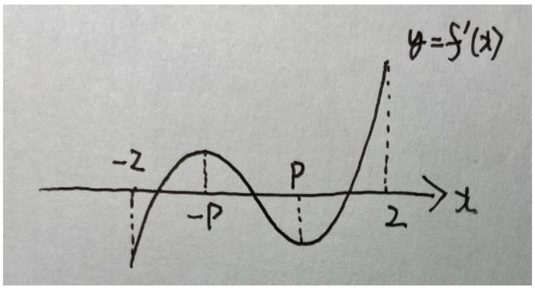
$p = \sqrt{\frac{5}{6}}$ とする。 ⇐ ちょっと複雑なので、p とおきました。

x	-2		$-p$		p		2
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	-14	↗	$f'(-p)$	↘	$f'(p)$	↗	10

ここで、$f'(p)=f'\left(-\sqrt{\dfrac{5}{6}}\right)=\dfrac{20}{3}\sqrt{\dfrac{5}{6}}-2>0,\ \ f'\left(\sqrt{\dfrac{5}{6}}\right)=-\dfrac{20}{3}\sqrt{\dfrac{5}{6}}-2<0$である。

＊わざわざ２階微分をしました。$f'(x)$ は x^3 の係数が正であり、極値をもちその極値が極大値が正、極小値が負ということが分りました。また、$f(-2), f(2)$ の値も求めました。

これで、$y=f'(x)$ の $-2 \leqq x \leqq 2$ におけるグラフは以下のようになるということが分ります。これで、$f'(x)$ の符号が求まります。



⇑$y=f'(x)$ のグラフは上図のようになります。$y=f'(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標を小さい方から、α,β,γ とでもおくことにします。

上図の $y=f'(x)$ のグラフと x 軸の共有点のうち、値が小さい方から α,β,γ とする。

$f(-2)=10,\ \ f(2)=2$ となる (← 計算は省略) ので、$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-2		α		β		γ		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	10	↘		↗		↘		↗	2

＊増減表が上図のようになりました。増減表の増減から判断をして、最大となるのは $x=-2, x=\beta, x=2$ のときのいずれかです。ただ、$f(-2)>f(2)$ は分かっているので、$x=-2$ と $x=\beta$ だけを考えれば OK です。

最小の方は、$x=\alpha, x=\gamma$ のときのいずれかです。

＊まず、最小値のほうから考えることにします。

PQ^2 が最小となるのは、点 P の x 座標が正のときである。
⇑ これは、元の $y=x^2$ のグラフから考えれば明らかだよね。数学の答案には、あまり明らかは使わない方がよいです。ただ、このくらい明らかな場合、別に使ってもらって OK

だと思いますよ。

$\alpha < -p$ より $\alpha < 0$、$\gamma > p$ より $\gamma > 0$
⇑$y = f'(x)$ のグラフより、$\alpha < -p, \gamma > p$ です。また、$p = \sqrt{\dfrac{5}{6}} > 0$ より $\alpha < 0, \beta > 0$ が成立します。

よって、最小となるのは $x = \gamma$ のときである。

これより、最小となる x 座標が $\dfrac{3}{2}$ 以上、つまり $\gamma \geqq \dfrac{3}{2}$ であることを示す。

＊どうやって示すのかな？と思う人もいますが、簡単ですよ。$y = f'(x)$ のグラフから考えることができます。$f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$ の符号で判断できますよ。

ここで、$f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{7}{2}$(← 計算は省略)。$y = f'(x)$ のグラフより、$f'\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$ であるとき $\gamma > \dfrac{3}{2}$ である。

以上より、最大値をとる x 座標は $\dfrac{3}{2}$ 以上である。(証明終)

＊ここから、γ の値の小数第１位まで求めます。γ は $\dfrac{3}{2}$ 以上なので、$f'(1.5), f'(1.6), f'(1.7)$ を計算していきます。これは、小さい方からすべてやっていくしかないですよ。メンドウだけど、こんな問題もたまにあります。解けるようになっておいてください。$f'(1.5)$ はやってみたけど、必要ありませんでした。答えには、$f'(1.6)$ と $f'(1.7)$ だけを書いておけば十分です。

$f'(1.6) = 2 \times (-0.808) < 0,\ \ f'(1.7) = 2 \times 0.326 > 0$ より
⇑ 計算は省略しました。単純に $f'(x) = 4x^3 - 5x - 1$ の中に代入をして計算をしているだけですよ。

$y = f'(x)$ のグラフを考えることにより、γ の値の小数第１位までは **1.6** となる。

＊次に、最大値を考えます。
増減表より、最大値は $f(-2) = 10$ と $f(\beta)$ で大きい方である。

ここで、$f'(0) = -2$ であり、$y = f'(x)$ のグラフより $\beta < 0$ である。増減表より、$\beta \leqq x \leqq \gamma$

のとき、$f(x)$ は単調減少であるので $f(\beta) > f(0)$ となる。

$f(0) = 10$ となることより、$f(\beta) > 10$ となる。よって、$f(x)$ は $x = \beta$ のとき最大となる。
⇑ 突然 $x = 0$ が現れたことが理解できないという人もいると思います。まあ、その疑問はもっともだけど、「これくらい気づいてくださいね」というのが出題者の意図です。だからこそ、ノーヒントで出題しています。

ポイントとしては、今回 $f(\beta)$ と 10 の大小関係を知りたいんだよね。ということは 10 がポイントです。$f(x) = x^4 - 5^2 - 2x + 10$ なんだけど、$f(0) = 10$ となってくれているよね。このくらい気づけてね、ということです。

最初のうちは難しいかもしれませんが、慣れてくるとできるようになります。「こんな考え方もある」ということを頭に入れておいてください。

よって、最小となるのは $x = \beta$ のときである。

これより、最小となる x 座標が $-\frac{1}{2}$ 以上、つまり $\beta \geqq -\frac{1}{2}$ であることを示す。

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$(← 計算は省略)。

$f'(x)$ は、$-p < x < p$ で単調減少であり。$-p < -\frac{1}{2} < p, -p < \beta < p$ であるので、$-\frac{1}{2} < \beta$ である。

以上より、最小値をとる x 座標は $-\frac{1}{2}$ 以上である。(証明終)

＊ここからはさっきと同じです。$x = -0.5, -0, 4$ などと代入していけば求まります。必要なのは、$f'(-0.2)$ と $f'(-0.3)$ だけなので、これだけを書いておけば十分です。

$f'(-0.2) = 2 \times (-2 \times 0.2^3 + 1 - 1) < 0,\ \ f'(-0.3) = 2 \times (-2 \times 0.3^3 + 1.5 - 1) > 0$ より
⇑ 厳密な値まで求めなくても、符号は求められます。

$y = f'(x)$ のグラフを考えることにより、β の値の小数第 1 位までは **−0.2** となる。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司