

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

---

単元：数学 IIB 「ベクトル 複素数平面」 難易度：「標準」

\*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

#### 問題

$O$  を原点とする。放物線  $y = x^2$  上に2点  $P(p, p^2)$ ,  $Q(q, q^2)$  がある。ただし、 $p < 0 < q$  とする。 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 2$  が成り立つとき、次の問いに答えよ。

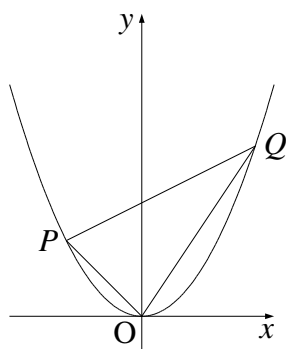
- (1)  $p$  と  $q$  の積  $pq$  の値を求めよ。
- (2)  $\triangle OPQ$  の面積の最小値、および最小値をとるときの  $p, q$  の値を求めよ。

#### 【問題の解説】

2008年の和歌山大学の文系の過去問です。問題のレベルとしては、ごくごく標準的な問題でベクトルの勉強さえ習っていたら、どんな人でも解けるレベルの問題です。

といっても、そこまで簡単な問題ではありません。学校のベクトルの勉強が終わった人には、ぜひともチャレンジしてもらいたい問題です。それでは、解説に進みます。

一応、図を書いておきますね。



(1) は単に  $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 2$  という条件に  $\vec{OP} = (p, p^2)$  と  $\vec{OQ} = (q, q^2)$  をあてはめるだけです。成分が与えられた内積の公式は次の通りです。知っている人も多いと思いますが、もう一度かいておきます。

#### 内積の計算 (成分)

$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$  のとき

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$  となる。

では、まず (1) の解答に進みます。

### 【問題 (1) の解答】

$\vec{OP} = (p, p^2), \vec{OQ} = (q, q^2)$  となる。

$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = pq + p^2q^2$  となる。

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 2$$

$$pq + p^2q^2 = 2$$

$$pq + (pq)^2 = 2$$

$$(pq)^2 + pq - 2 = 0$$

$$(pq - 1)(pq + 2) = 0$$

$$pq = 1, -2$$

ここで、問題の条件より  $p < 0, q > 0$  より、 $pq < 0$  となるので、 $pq = -2$  となる。

↑ 複数個の答えとなることは少ないですよ。答えが複数個でてきたときは、より丁寧に条件を見返すようにしてください。

## 【問題（2）の解説】

まず、三角形の面積の求め方です。三角形の面積の求め方はいろいろとありますが、今回のように座標が与えられているときの面積は次の公式を使って求めます。

座標が与えられているときの三角形の面積の求め方

$\vec{AB} = (a, b)$ ,  $\vec{AC} = (c, d)$  のとき、 $\triangle ABC$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} |ad - bc| \text{ となる。}$$

\*この面積の公式は、ベクトルの三角形の面積の公式  $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$  から導くことができますが、 $S = \frac{1}{2} |ad - bc|$  はよく出てくるし導くのは少し面倒なので公式自体を暗記するようにしておいた方がいいです。

それでは、これを使って解答に進みます。まだ、説明しないといけないこともあります。それは解答の中で順を追って説明しながら解いていくことにします。

## 【問題（2）の解答】

$\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると、 $S = \frac{1}{2} |pq^2 - p^2q|$  ◀ 三角形の面積の公式を適用 となる。

\*数学は文字の数を減らせるときは、文字消去して文字の数を減らしてから考えていきます。

今回は、(1) より  $pq = -2$  という条件があるので、この条件を使って  $p$  か  $q$  を消去して考えていきます。

どちらの文字を消去してもいいんですが、 $p < 0$  と  $q > 0$  のふたつを見比べてみれば、 $p < 0$  は負、 $q > 0$  は正。負より正の条件の方が扱いやすいので、条件の扱いにくい  $p$  を消去して、 $q$  のみの式にしてから解いていきます。

今回の問題は簡単なので、このくらいならどちらを消去しても、計算量は大して変わってきませんが、より難しい問題になると計算量が大きく変わってくる問題も多いです。ですから、文字消去するときは面倒な方、考えにくそうな方を消去する、ということを頭に覚えておいてください。

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} |pq^2 - p^2q| \\
&= \frac{1}{2} \left| -\frac{2}{q} \cdot q^2 - \left(-\frac{2}{q}\right)^2 \cdot q \right| \leftarrow p = -\frac{2}{q} \text{ を代入して、} p \text{ を消去した} \\
&= \frac{1}{2} \left| -2q - \frac{4}{q} \right| \\
&= \left| q + \frac{2}{q} \right| \\
&= q + \frac{2}{q} \leftarrow q > 0 \text{ より、} \frac{2}{q} \text{ も正、当然 } q + \frac{2}{q} > 0
\end{aligned}$$

\*ここからは、解けるようになっておいて欲しいのですが、関数の最大値、最小値問題はグラフを描いて解くことが多いです。

$S = q + \frac{2}{q}$  のグラフを描けたらいいんだけど、分数を含んでいる関数なので数学 II Bまでの範囲ではグラフをかくことはできない

だから、数学 II Bまでの範囲で最大値、最小値問題が出てきたら、グラフを描くという以外の解法があるはずですよ。

で、その場合のほとんどが相加相乗平均を使って解きます。もちろん、相加相乗平均以外の解法で解くこともあります。でも、相加相乗平均で解くことが圧倒的に多いです。分数関数の最大値、最小値問題は何よりもまず、相加相乗平均で問題を解くことができないか考えるようにしてください。

相加相乗平均を使った、最大値最小値問題の解き方を知らないという人は、以下のページも参考にしてください。

相加相乗平均を使った最大最小問題の基本 <http://www.hmg-gen.com/kaitou2-3.pdf>

相加相乗平均を使った最大最小問題の実践編 <http://www.hmg-gen.com/tecni2b-3.pdf>

$$\begin{aligned}
S = q + \frac{2}{q} &\geq 2\sqrt{q \cdot \frac{2}{q}} \quad (\because q > 0 \text{ より、相加相乗平均}) \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

等号は  $q = \frac{2}{q}$  つまり  $q = \sqrt{2}$  のときに成立するので、 $S$  の最小値は  $2\sqrt{2}$  となる。

$pq = -2$  より、 $p = -\sqrt{2}$  となる。

以上より、 $p = -\sqrt{2}$ ,  $q = \sqrt{2}$  のとき、 $S$  は最小値  $2\sqrt{2}$  をとる。

これで、今回のプリントは終わりです。受験問題としては簡単ですが、まだ難しい問題に慣れていない人にとっては難しかったと思います。

最後に相加相乗平均を使って最小値を求めましたが、大学受験では、本当に相加相乗平均を使って最大値や最小値を求めることって多いんです。はじめて見たという人もいるかもしれませんが、重要です。しっかりと理解しておいてください。

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「[わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!](#)」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「[ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!](#)」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「[解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!](#)」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

**ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ**

<https://hmg-gen.com/merutou.html>

---

ツイッターやっています  
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法  
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法  
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）  
[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司