「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 II の「不等式の証明」　　難易度：「標準」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

不等式

$$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\frac{1}{48}$$

をみたす正の整数 m の最小値は $\boxed{\text{アイ}}$ である。

【（１）の解説】

どうやってよいのか少し考えにくい問題です。$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}$ のまま直接考えることは難しそうです。

そこで、$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}$ でできることは？と考えてとりあえず有理化してみることにします。３乗根の有理化はたまに出てきます。覚えておいてください。

$$\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m} < \frac{1}{48}$$

$$(\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m}) \cdot \frac{\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2}} < \frac{1}{48}$$ ◀ 有理化をした！

$$\frac{(\sqrt[3]{(m+1)^2})^3 - (\sqrt[3]{m})^3}{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2}} < \frac{1}{48}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2}} < \frac{1}{48}$$

$$\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2} > 48$$

とりあえず、ここまでたどりつきました。「ここからどうしよう？」と考えます。この不等式を解こうとしても、ややこしすぎておそらく解けそうにない…

そこでなんだけど、今回 m は整数なんだよね。もし、この不等式が実数だったら不等式をまじめに解くしかないです。ただ、整数の場合、必要条件から考えていくということも多いです。

方程式や不等式で、突然必要条件ときても、「どこから、その発想がきたの」なんて思う人も多いです。ただ、「整数のときは必要条件で解くこともある」と頭に入れておけば、気づけるようになりますよ。

３乗根の中身をみると、$(m+1)^2, m(m+1), m^2$ です。当然、$(m+1)^2 > m(m+1), (m+1)^2 > m^2$ が言えるよね。これで必要条件で解いていくことにします。

今、$\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2} < \sqrt[3]{(m+1)^2} + 3\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{(m+1)^2}$ が言えます。つまり、$\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2} < 3\sqrt[3]{(m+1)^2}$ が成立します。

この式と、$\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2} > 48$ より、$3\sqrt[3]{(m+1)^2} > 48$ が言えます。

＊この不等式の作り方少し気づきにくいかもしれません。でも、与式が $m+1$ のみの式だったら解けるよね。だから、上記のようにすることにしました。m で不等式を作るのかななんて思うかもしれません。

その場合、$\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2} > \sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{m^2} = 3\sqrt[3]{m^2}$ という不等式自体は作れます。

ただ、この場合、$\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}>3\sqrt[3]{m^2}$ かつ、$\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}>48$、となります。

これでは、不等式を作ることはできません。$A>B, A>C$ の場合、B と C の大小関係は分からないよね。一方、$A>B, B>C$ となっていたら $A>C$ が成立します。

ここまでくると大丈夫だと思うので、解答に進みます。とりあえず必要条件で解いて、あとは十分性の確認です。

【問題１（３）の解説】

$$\sqrt[3]{(m+1)^2}-\sqrt[3]{m}<\frac{1}{48}$$

$$(\sqrt[3]{(m+1)^2}-\sqrt[3]{m})\cdot\frac{\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}}<\frac{1}{48}$$ ◀ 有理化をした！

$$\frac{(\sqrt[3]{(m+1)^2})^3-(\sqrt[3]{m})^3}{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}}<\frac{1}{48}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}}<\frac{1}{48}$$

$$\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}>48\cdots①$$

また、$\sqrt[3]{m(m+1)}<\sqrt[3]{(m+1)^2},\quad \sqrt[3]{m^2}<\sqrt[3]{(m+1)^2}$ より
$\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}<3\sqrt[2]{(m+1)}^2\cdots②$

①,② より $3\sqrt[3]{(m+1)^2}>48$ が成立する。
⇑ これは①が成立するための必要条件。とりあえず、この必要条件で範囲限定して、そこから十分性を確認するという流れが、よく使う手法ですよ。

$$3\sqrt[3]{(m+1)^2}>48$$

$$\sqrt[3]{(m+1)^2}>16$$ ◀ 両辺を３で割った！

$$(m+1)^2>2^{12}$$ ◀ 両辺を３乗した！

$$m+1>2^6 \quad (\because\ m \text{ は正の整数より } m+1>0)$$

$$m>63$$

＊今必要条件で考えています。①を満たすには $m>63$ である必要があります。m は正の整数なので $m\geqq 64$ です。

この不等式を満たす最小の m は 64 です。もし、この 64 が ① も満たしていれば 64 が答えになります。64 が ① を満たしていそうなのは何となくわかります。

答えのみを求められているので、いきなりこれを答えにしてもかまいません。ただ、一応、十分性の確認もしておきます。

$m = 64$ のとき

$$\sqrt[3]{(m+1)^2} + \sqrt[3]{m(m+1)} + \sqrt[3]{m^2}$$
$$> \sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{m^2} \quad (\because \ \sqrt[3]{(m+1)^2} > \sqrt[3]{m^2}, \ \sqrt[3]{m(m+1)} > \sqrt[3]{m^2})$$
$$=3\sqrt[3]{m^2}$$
$$=3\sqrt[3]{64^2} \quad (\because \ m = 64)$$
$$=48$$

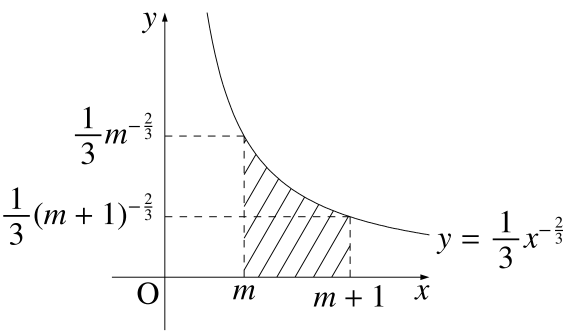
よって、$m = 64$ のとき ① を満たす。したがって、求める m の最小値は **64** である。

【問題１（３）の別解について】

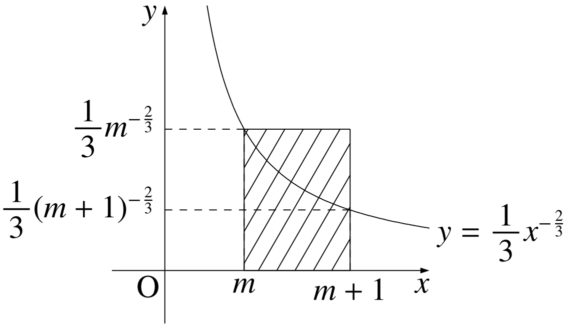
この問題ですが、積分の不等式を使っても解くことができます。

少し気づきにくいけど、今回の $\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m} = \displaystyle\int_m^{m+1} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ と変形できます。

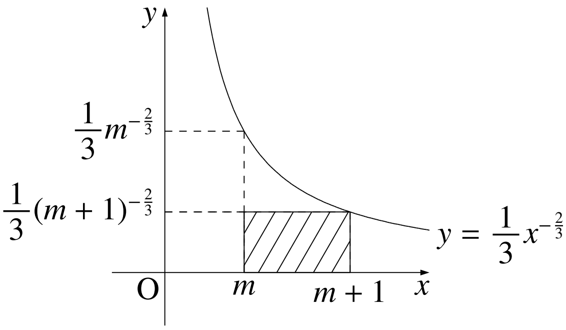
このとき、積分区間の差が $(m+1) - m = 1$ となっているよね。こういうときは、面積を使って不等式を作り出すことができます。



上図の面積が $\displaystyle\int_m^{m+1} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ と一致します。



上図の長方形は横の長さが $(m+1)-m=1$ で、縦の長さが $\frac{1}{3}m^{-\frac{2}{3}}$ より、長方形の面積は $\frac{1}{3}m^{-\frac{2}{3}}$ です。



上図の長方形は横の長さが $(m+1)-m=1$ で、縦の長さが $\frac{1}{3}(m+1)^{-\frac{2}{3}}$ より、長方形の面積は $\frac{1}{3}(m+1)^{-\frac{2}{3}}$ です。

３つの面積を比較することにより、不等式 $\frac{1}{3}(m+1)^{-\frac{2}{3}} < \int_m^{m+1} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx < \frac{1}{3}m^{-\frac{2}{3}}$ が成立します。

この不等式を利用することにより、m の最小値を求めることができます。

＊まあ、言われたら分かると思うけど、この問題でこの発想をするのは少し難しいかな？と思います。

もし、この問題が「不等式 $\frac{1}{3}(m+1)^{-\frac{2}{3}} < \int_m^{m+1} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx < \frac{1}{3}m^{-\frac{2}{3}}$ を証明せよ」なら、一瞬でこの解法を気づけないといけません。ただ、今回のこの問題で思いつくのは難しいかもしれません。「こんな解法もあるんだぁ」といった程度の理解で十分です。

【問題１（３）の別解】

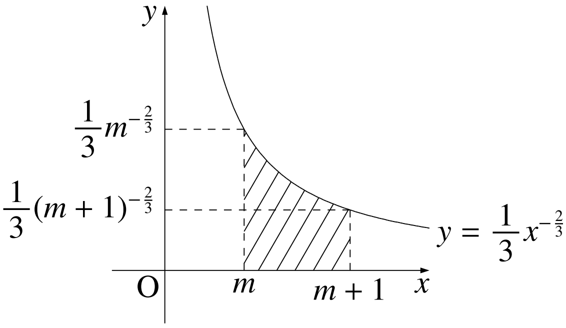


図 1

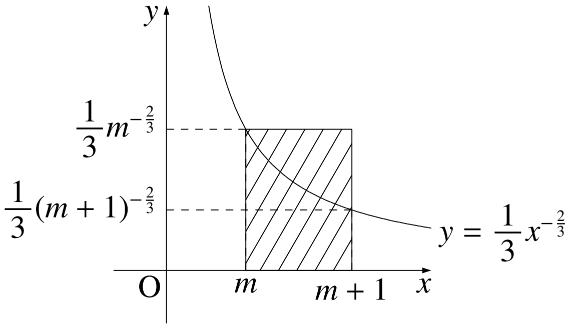


図 2

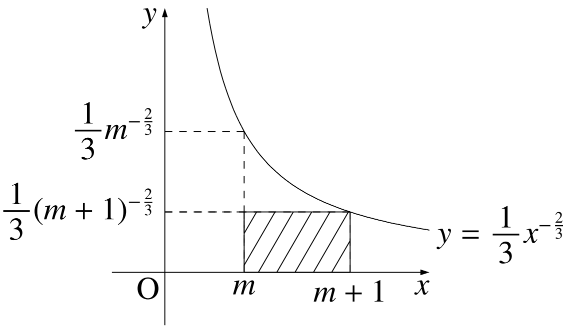


図 3

グラフより、(図１の斜線部の面積)= $\displaystyle\int_m^{m+1} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m}$、
(図２の斜線部の面積)= $\frac{1}{3}m^{-\frac{2}{3}}$、(図３の斜線部の面積)= $\frac{1}{3}(m+1)^{-\frac{2}{3}}$ である。

また、(図３の斜線部の面積)<(図１の斜線部の面積)<(図２の斜線部の面積) より、
不等式 $\frac{1}{3}(m+1)^{-\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m} < \frac{1}{3}m^{-\frac{2}{3}} \cdots$ ① が成立する。

ここで、$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{48}$ を解くと、$x = 64$ となる。
⇑ 計算はできると思うので、省略しました。

① で $m = 63$ のとき、$\frac{1}{48} < \sqrt[3]{63+1} - \sqrt[3]{63} < \frac{1}{3} \cdot 63^{-\frac{2}{3}}$

①で $m=64$ のとき、$\frac{1}{3}\cdot 65^{-\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{64+1}-\sqrt[3]{64} < \frac{1}{48}$ である。

以上より、$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m} < \frac{1}{48}$ を満たす最小の m は **64** である。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司