
単元：数学 II の「三角関数」　　難易度：「標準」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

関数 $y = 3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta + 6\sin\theta + 12\cos 2\theta$ について、次の各問に答えよ。
ただし、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。
(1) $x = \sin\theta + 2\cos\theta$ として、y を x の関数で表せ。
(2) y の最大値と最小値を求めよ。

【解説】

置き換えを利用して解く三角関数の最大値・最小値問題です。頻出だからしっかりと理解しておいてくださいね。

今回は（１）で「$x = \sin\theta + 2\cos\theta$」と置換すると誘導が与えられているよね。だから、誘導にのっていけばいいだけですよ。

ちなみに、この「置き換えを利用して解く三角関数の最大値・最小値問題」の置換としては、下記の５パターンです。覚えておいてくださいね。

それぞれのパターンをプリントで解説をしているので、自信がない人はこのプリントで勉強をしておいてください。

① $t=\sin\theta$ とする。https://www.hmg-gen.com/sankaku6.pdf

② $t=\cos\theta$ とする。https://www.hmg-gen.com/sankaku6.pdf

③ $t=\sin\theta+\cos\theta$ とする。https://www.hmg-gen.com/sankaku7.pdf

④ $t=\sin\theta-\cos\theta$ とする。https://www.hmg-gen.com/sankaku8.pdf

⑤ $t=\sin\theta\cos\theta$ とする。https://www.hmg-gen.com/sankaku9.pdf

今回の問題もそうだけど、上記の５パターンにあてはまらないものは「こういうふうに置換せよ」と誘導が与えられています。

たまに、「誘導があったから気づけたけど、もし誘導なしで出題されたらこんな置換気づけません」なんて言う人がいます。

でも、心配しなくていいですよ。こういった問題のときは、ほとんどの場合誘導があります。誘導がない場合は、上記の５パターンのいずれかになります。

めったに見た記憶はありませんが、上記の５パターン以外でさらに誘導がなかった場合のときです。こういったときは、ごくごく簡単な置換で解けることが多いです。

そもそも誘導がないということは「簡単に気づけますよ」という出題者からのヒントなんです。だから、それほど深く考えないで解いていってもらったら大丈夫ですよ。

【（１）の解答つきの解説】

$$\begin{aligned} y &= 3\cos 2\theta+4\sin 2\theta+6\sin\theta+12\cos 2\theta \\ &= 3\cos 2\theta+4\sin 2\theta+6(\sin\theta+2\cos\theta) \\ &= 3\cos 2\theta+4\sin 2\theta+6x \end{aligned}$$

と変形できます。

ということは、まだ x で表されていない $3\cos 2\theta+4\sin 2\theta$ の部分が x の式で表されるはずなんだよね。

ここからは、強引に変形していきます。本当に強引に変形していきます。こういったタ

イプの問題に慣れておいてくださいね。

今回は、２通りの方法で解いてみようと思います（どっちでも無理のない解き方だと思いますよ）。ただ、見てもらえば分かると思うけど、両方ともかなり強引な式変形です。

【ひとつめの解法】
$3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta$ の部分が x のみを使って表せるんだよね。

とりあず $x = \sin\theta + 2\cos\theta$ の両辺を２乗してみます。なぜ、２乗するのかと言えば、以下の公式を使いたいからです。

できたら覚えておいて欲しい三角関数の公式

$$\boldsymbol{\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2},\quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

上記で θ を $\dfrac{\theta}{2}$ で置き換えると半角の公式が導かれますよ。

三角関数の公式ですが、加法定理さえ覚えていればすべて導くことができます。ただ、ある程度暗記しておいた方がよいと思いますよ。

暗記が好き、きらいによって変わってきます。ただ、別に「どっちもでいい」というタイプの人なら「２倍角の公式」はよく出てくるので丸暗記。「３倍角の公式」はあまり出てこないけど、導くのがメンドウなのでできたら暗記。ただ、３倍角の公式は導出の証明もよく出てくるので、自分で導けないとダメですよ。

半角の公式は、その場で導けばいいです。ただ、$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ のコサインの２倍角の公式から導けるということは覚えておかないとダメですよ。

後、和積、積和の公式ですが、これは加法定理を足したり引いたりするだけで求めることができます。めったに出てこないですし、また似ている式が多く暗記では間違えやすいので、その場で加法定理から導いてもらったらいいですよ。

あと、今回の $\sin\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ は、理系の人は積分計算でよく出てくる公式です。文系の人はどっちでもいいけど、理系の人は覚えておいてくださいね。

ちょっと、公式の話しが長くなりました。それでは、元に戻るね。$x = \sin\theta + 2\cos\theta$ の両辺を 2 乗してみます。2 乗することにより、$\sin^2\theta, \sin\theta\cos\theta, \cos^2\theta$ が出てきます。これらは、すべて 2θ の形で表すことができます。

今回の場合、$3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta$ の部分が x のみで表されるんだよね。こうなるためには、2θ で表される必要があります。だから、現段階ではうまくいくかどうかわからないけど、2θ が必要ということで、とりあえず $x = \sin\theta + 2\cos\theta$ の両辺を 2 乗することにします。
＊こういった式変形が強引な式変形です。とりあえず一部分だけでも強引に作ったらうまく解けるようになってくれていますよ。

$$x = \sin\theta + 2\cos\theta$$

$$x^2 = (\sin\theta + 2\cos\theta)^2 \quad \blacktriangleleft \text{両辺を 2 乗した！}$$

$$= \sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta$$

$$= \frac{1-\cos 2\theta}{2} + 4\cdot\frac{\sin 2\theta}{2} + 4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\Uparrow \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \sin\theta\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}, \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \text{ より}$$

$$2x^2 = 1 - \cos 2\theta + 4\sin 2\theta + 4(1+\cos 2\theta) \quad \blacktriangleleft \text{両辺に 2 をかけて分数を消した！}$$

$$= 5 + 4\sin 2\theta + 3\cos 2\theta$$

よって、$3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta = 2x^2 - 5$
$\Uparrow$ これで $3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta$ の部分を x のみで表せました。なんだか、知らないけどうまいぐあいに解けるようになっているよね。

【ふたつめの解法】
それではふたつめの解法に進みます。さっきは x のほうを 2θ の式で表しました。ですが、今度は $3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta$ を 2 倍角の公式で変形をしてから解いていくことにします。

$$
\begin{aligned}
&3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta \\
=&3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 4\cdot 2\sin\theta\cos\theta \\
=&3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

とりあえず、ここまでへんけいしました。$3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta$ の部分が x のみを使って表せるはずです。また、２乗が出てくるので $x = \sin\theta + 2\cos\theta$ の両辺を２乗します。

すると $x^2 = \sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta$ となります。で、ここから $3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta$ を見てみると $\sin\theta\cos\theta$ の係数は８なんだよね。だから、$x^2 = \sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta$ の両辺を２倍して、とりあえず $\sin\theta\cos\theta$ の係数だけでもそろえておきます (こういったところが強引な式変形。こういう変形に慣れておいてね)。

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta \\
2x^2 &= 2\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta \quad \blacktriangleleft \text{両辺を２倍した！} \\
&= 5\sin^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta \quad \blacktriangleleft\ 2\sin^2\theta = 5\sin^2\theta - 3\sin^2\theta \text{ より！下記【注】を参照} \\
&= 5(1-\cos^2\theta) - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta \\
&= 5 - 5\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta \\
&= 5 + 3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

よって、$3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta = 2x^2 - 5$ と、
当初予想した通り $3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta$ を x のみを使って表すことができました。

上記の【注】について
上記の $2\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta = 5\sin^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta$ と変形するところは、本当に気づきにくいと思います。

でも、これまでの「強引に変形する！一部だけでもそろえたら、残った部分もうまくいくようになっている !!」ということを覚えていれば気づけるようになりますよ。

今回 $3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta$ を x のみで表したいんだよね。

$2x^2 = 2\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta$ を変形して、$3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta$ を含んだ式に強引に変形します。とりあえず、$2x^2 = 2\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta$ の右辺で $\cos^2 x$ の係数が３になるように強引変形します。$2\sin^2\theta = 5\sin^2\theta - 3\sin^2\theta$ と変形すれば、$\cos^2 x$ の係数が３になってくれます。

後、残った部分も計算して見ればうまくいってくれています。

これより、（１）の答えは $\boldsymbol{y = 2x^2 + 6x - 5}$ です。

【(２）の解説】

（２）は、簡単ですよ。

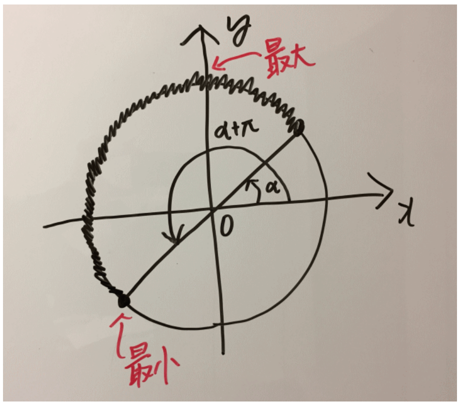
（１）で、$x = \sin\theta + 2\cos\theta$ というふうに置換したんだよね。

置換したときは、置換した文字の値を考えないといけません。今回は、$x = \sin\theta + 2\cos\theta$ です。こういった形をしているときは、三角関数の合成をするんだったんだよね。

$x = \sin\theta + 2\cos\theta = \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$ ただし、$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすとします。

たまに、α は第一象限にあるから必ず $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすんじゃないの？という人がいます。でも、何周してもOKなんだよね。だから、$2n\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数) だったらOKです。ただ、今回はその中でも $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で考えますよ、ということです。

それでは、今から $\sin(\theta + \alpha)$ の値の範囲を求めていきます。今回の場合、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ なんだからすべての辺に α を加えると、$\alpha \leqq \theta + \alpha \leqq \pi + \alpha$ です。で、$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ なんだよね。単位円をかくと、次のようになりますよ。



もちろん α は具体的な角度です。ただ、$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ になっているんだよね。α がこの範囲にあるとき、$\sin(\theta + \alpha)$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における値の範囲は、上図の単位円より、

$\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大となります。$\sin(\theta + \alpha) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ です。

$\theta + \alpha = \alpha + \pi$ のとき最小となります。$\sin(\theta + \alpha) = \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$ です。で、今回の場合 $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ より、当然 $\sin(\theta + \alpha) = -\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ です。

これで、$-\dfrac{2}{\sqrt{5}} \leqq \sin(\theta + \alpha) \leqq 1$ と分かりました。これより、$x = \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$ の値の範囲は、$-2 \leqq x \leqq \sqrt{5}$ となります。

後は、この範囲における $y = 2x^2 + 6x - 5$ の最大値と最小値を求めるだけです。簡単なので、解答に進みます。

【(２）の解答】

$x = \sin\theta + 2\cos\theta = \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$ ただし、$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすとする。

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき、$-\dfrac{2}{\sqrt{5}} \leqq \sin(\theta + \alpha) \leqq 1$ となるので、$-2 \leqq x \leqq \sqrt{5}$ となる。

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 + 6x - 5 \\
&= 2(x^2 + 3x) - 5 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{2}
\end{aligned}
$$

＊ここから、２次関数のグラフを描いてもいいけど、このくらいだったら描かなくても分かるよね。$x = -\frac{3}{2}$ のとき最小で $x = \sqrt{5}$ のとき最大となります。

$x = \sqrt{5}$ のとき、最大値 $\mathbf{5 + 6\sqrt{5}}$ となり、$x = -\frac{3}{2}$ のとき、最小値 $\mathbf{-\frac{19}{2}}$ となる。

【注】 数学は基本的に問題で書かれていないことは答案に書く必要はありません。今回の場合、最大値と最小値を求めよ、とだけ書いていて、そのときの θ の値を求めよ、とは書いていないよね。

こういったときは、基本的に書かなくていいですよ。ただ、あまりに簡単に求めることができるときや、学校では書くことを前提にしているところもあります。そういったときは、学校で合わせてもらえば大丈夫です。

このタイプの問題は頻出だから、解けるようになっておいてくださいね。特に（１）は独特な解き方です。とにかく、強引に解いていくということがポイントですよ。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格 !」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司