「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 II の「複素数と方程式」　　難易度：「基礎レベル」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

２次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が、次のような解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。（数学 II の解法で解け）

(1) 異なる２つの正の解

(2) 符号が異なる２つの解

【（１）の解説】

この問題は数学 I の２次関数の解法でも解くことができます。ただ、数学 II の解と係数を使った解法も重要です。

ここでは、解と係数を使った解法で解いていってもらうことにします。

問題に進む前に、以下の同値変形を覚えておいてください。

重要な同値変形

$$\alpha>0 \text{ かつ } \beta>0 \iff \alpha+\beta>0 \text{ かつ } \alpha\beta>0$$

同値っていうのは必要十分条件と同じだからね。上記の同値変形はよく出てくるから覚えておいてください。

知っている人もいると思います。でも、なぜ同値なのかを知らない人も多いと思うので解説しておくことにします。

p と q が同値とは、$p \Rightarrow q$ が真で、かつ $p \Leftarrow q$ が真だったんだよね。

上記の場合、「$(\alpha > 0$ かつ $\beta > 0) \Rightarrow (\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0)$」が真であることは、明らかだと思います。だって、α も β も正のとき、２数を足しても、２数をかけても当選正になるよね。だから、「$(\alpha > 0$ かつ $\beta > 0) \Rightarrow (\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0)$」は真です。

次に、反対の「$(\alpha > 0$ かつ $\beta > 0) \Leftarrow (\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0)$」です。

$\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ のうち、まずは $\alpha\beta > 0$ の方から考えます。２数をかけて正とは、両方とも正または両方とも負のいずれかが考えられるんだよね。だから、$\alpha\beta > 0$ であることと、「$(\alpha,\beta$ ともに正$)$ または $(\alpha,\beta$ ともに負$)$」であることは同値です。

今回の場合、さらに $\alpha + \beta > 0$ があったんだよね。だから、α,β がともに負というのは当然不適です。α,β がともに正のとき、$\alpha + \beta > 0$ を満たしています。

だから、「$\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$」を言い換えると、「$\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$」です。このことより、「$(\alpha > 0$ かつ $\beta > 0) \Leftarrow (\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0)$」も真です。

両方とも真なので、「$\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$」は「$\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$」であることと同値です。

当たり前のことを言葉で説明したので、少し分かりにくかったかもしれません。「どうして同値なの？」と気になる人が多いので一応解説しておきました。

もし、考えるのがメンドウというのなら別にいいですよ。ただ、上記の同値変形はよく出てくるので覚えておいてくださいね。

で、なぜ上記のような同値変形をするのか？というと、α,β は求められないけど（単なる２次方程式の解なので、解の公式を使えば求められないことはない。ただ、ルートを含んで汚い数字になるので、あまり使いたくない)、$\alpha+\beta$ や $\alpha\beta$ だったら解と係数の関係より簡単に求めることができるよね。

だから、この同値変形を使います。(

それでは、（１）に進みます。（１）は、２次方程式が異なる２つの正の解をもち、そして２解とも正なんだよね。２次方程式の判別式を D として、２解を $\alpha\beta$ とすると、「$D>0$ かつ $\alpha>0$ かつ $\beta>0$」となれば当然 OK だよね。

で、ここから先ほどの同値変形を使います。だから、今回は「$D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$」となれば OK です。それでは、解答に進みます。

【（１）の解答】

２次方程式 $x^2+2(a-2)\,x+a=0$ の判別式を D とし、２解を α,β とする。

この２次方程式が異なる２つの正の解をもつとき、「$D>0$ かつ $\alpha>0$ かつ $\beta>0$」つまり「$D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$」となる。

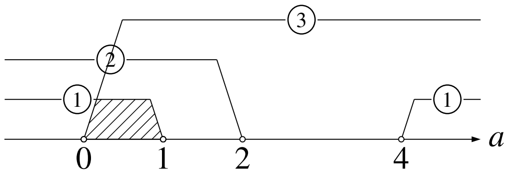
$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-1\cdot a>0$$
$$a^2-5a+4>0$$
$$(a-1)(a-4)>0$$
$$a<1\text{または}4<a\cdots①$$

解と係数の関係より、$\alpha+\beta=-2(a-2),\ \ \alpha\beta=a$

$\alpha+\beta>0$ より $-2(a-2)>0$ つまり $a<2\cdots②$

$\alpha\beta > 0$ より $a > 0 \cdots$ ③

①, ②, ③ より



よって、求める a の値の範囲は $\mathbf{0 < a < 1}$ である。

【（２）の解説】

次に（２）です。（２）は符号が異なる２つの解を持つんだから、「$D > 0$ かつ $\alpha\beta < 0$」だったら OK なんだよね。

まず、異なる２つの実数解をもつ条件が $D > 0$ です。そして、その２つの実数解が異符号であるための条件が $\alpha\beta < 0$ です。

大丈夫な人も多いと思うけど、異符号である条件よく出てくるから覚えておいてね。「a,b が異符号」とは「$ab < 0$」です。

ただ、今回の問題は多くの問題集の解答では $D > 0$ は無視された、$\alpha\beta < 0$ だけで答えています。

今から理由を話すけど、$\alpha\beta < 0$ を満たしているとき、必ず $D > 0$ となっています。だから、$D > 0$ は無視をして、$\alpha\beta < 0$ のみを解けば答えになってくれます。

＊ $\alpha\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad D > 0$ を示します。
$ax^2 + bx + c = 0$ の２解を α, β とする。解と係数の関係より $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$。

$\alpha\beta < 0$ より $\dfrac{c}{a} < 0$ つまり $ac < 0$

$\Uparrow$ $\dfrac{c}{a}<0$ のとき、a と c は異符号だよね。だから、$ac<0$ も言えますよ。

$ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とする。$D=b^2-4ac$

＊ b は実数だから $b^2 \geqq 0$ だよね。そして、$ac<0$ だから、$-4ac>0$ です。この２つより、$b^2-4ac>0$ が言えます。

$b^2 \geqq 0, -4ac>0$ より $b^2-4ac>0$ つまり $D>0$ (証明終わり)

一応、上記のように証明できます。さっきも言ったけど、こういう類の問題って $D>0$ は無視をして、$\alpha\beta<0$ だけで解いています。

個人的には、しっかりと証明しないとダメなんじゃないのかな？と思いますが、教科書にあわせて $D>0$ は省略することにします。

【(２）の解答】

２次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ の２解を α,β とする。解と係数の関係より、$\alpha\beta=a$

２次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が異符号の解をもつとき、$\alpha\beta<0$ である。

よって、求める a の値の範囲は $\boldsymbol{a<0}$ である。

これで、今回の解説プリントは終わりです。今回の問題は、解けた人も多いと思います。でも、ただ暗記で解いているだけで「異なる２つの正の解のとき $\alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$ なの？」「異符号の解のときはどうして判別式を使わないの？」など理解出来ていない人が多かったと思います。

解けたら OK だという考えでは、問題がすこしでも難しくなったらできなくなってしまいますよ。しっかりと、理解しながら進めるようにしてくださいね。

＊ただ、バランスも必要。「数学は理解しないで進めても意味がないんだ」ということ

で、延々と同じ問題を考えている人がいます。

でも、理解できないなら理解できないで、どんどんと前に進めていくことも重要ですよ。
常にバランスを意識しながら進めていくようにしてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司