「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題５

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n, k が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき、${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ。

(2) p を素数とする。$k \leqq n$ をみたす自然数の組 (n, k) で ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ。

【問題５の解答】

(1) ＊不等式の証明なので、(左辺) − (右辺) が０より大きいという流れで示していきます。ただ、元のままでは考えにくいので、もう少し分かりやすい形に同値変形をしてから解いていきます。

$${}_n\mathrm{C}_k > n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} > n!$$

$$\Leftrightarrow n! > n \cdot k!(n-k)! \cdots ①$$

以下、① を示す。

(左辺) − (右辺)

$=n! - n \cdot k!(n-k)!$

$=n\{(n-1)! - k!(n-k)!\}$ ◀ $n! = n(n-1)!$ より！

$=n\{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)! - k!(n-k)!\}$ ◀ $n! = (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)!$ より！

$=n(n-k)!\{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) - k!\}$

$=n(n-k)!\,k!\left\{\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} - 1\right\}$

＊$(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ は、$n-1$ から始まって $n-k+1$ までの連続する $k-1$ 個の整数の積です。そして、分子の方は $k! = k(k-1)\cdots 2\cdot 1$ と k から始まって連続する k 個の積です。最後の 1 を除けば $k-1$ 個の積です。

$\dfrac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$ をひとつずつの整数の積の形に変形します。

$$=n(n-k)!\,k!\left\{\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}-1\right\}$$
$$=n(n-k)!\,k!\left\{\frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{k-(k-2)}-1\right\}$$

＊ここから上記の $\dfrac{n-1}{k},\ \dfrac{n-2}{k-1},\ \cdots,\ \dfrac{n-(k-1)}{k-(k-2)}$ がすべて 1 より大きいということを示して解いていくことにします。

ここで $\dfrac{n-i}{k-(i-1)} > 1\ \ (1 \leqq i \leqq k-1)$ であることを示す。

$n-i-\{k-(i-1)\} = n-k-1$ である。また、$k \leqq n-2$ より $n-k-2 \geqq 0$ である。

このとき $n-k-1 \geqq 1 > 0$ である。よって、$n-k-1 > 0$ つまり $n-i-\{k-(i-1)\} > 0$ である。すなわち $\dfrac{n-i}{k-(i-1)} > 1\ \ (1 \leqq i \leqq k-1)$ であることがいえる。

$\dfrac{n-1}{k} > 1,\ \dfrac{n-2}{k-1} > 1, \cdots, \dfrac{n-(k-1)}{k-(k-2)} > 1$ であるので、$\dfrac{n-1}{k}\cdot\dfrac{n-2}{k-1}\cdots\dfrac{n-(k-1)}{k-(k-2)} > 1$ である。

よって、

$n(n-k)!\,k!\left\{\dfrac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}-1\right\} > 0$ が成立する。つまり ① が成立する。

① と ${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることは同値であるので、${}_n\mathrm{C}_k > n$ も成立する。(証明終)

(2) ＊ p が素数であることと、あとは (1) の結果を使って解いていきます。(2) は $k \leqq n$ で (1) では $2 \leqq k \leqq n-2$ です。

つまり(2)では$k \leqq n$なので$k=1$のとき、$k=n-1$のとき、$k=n$のとき、$2 \leqq k \leqq n-2$のときとで分けて考えていきます。

(i) $k=1$のとき

${}_n\mathrm{C}_k = p$に$k=1$を代入する。${}_n\mathrm{C}_1 = p$つまり$n=p$である。よって、$(n,k)=(p,1)$となる。

(ii) $k=n-1$のとき

${}_n\mathrm{C}_k$に$k=n-1$を代入する。${}_n\mathrm{C}_{n-1} = p$つまり$n=p$である。$n=p$のとき$k=n-1$は$k=p-1$となる。よって、$(n,k)=(p,p-1)$

(iii) $k=n$のとき

${}_n\mathrm{C}_k$に$k=n$を代入する。${}_n\mathrm{C}_n = p$より$p=1$となる。1は素数でないので$p=1$は不適である。

(iv) $2 \leqq k \leqq n-2$のとき

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_k &= p \\
\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 1} &= p \\
n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1) &= p \times k\cdot(k-1)\cdots 1 \cdots ②
\end{aligned}
$$

⇑ 右辺は$p\times\cdots$の形になっているのでpの倍数です。従って、左辺もpの倍数となります。今、pは素数なので、左辺がpの倍数となるとき、$n, n-1, \cdots, n-k+1$の少なくともひとつがpの倍数でないといけません。

$k\cdot(k-1)\cdots 1$は整数である。よって、② の右辺はpの倍数である。このことより、② の左辺もpの倍数となる。

pは素数であるので、② の左辺がpの倍数となるとき「$n,\ n-1,\ \cdots, n-k+1$の少なくともひとつがpの倍数」となる。

*ここから(1)の結果を使って「$n,\ n-1,\ \cdots, n-k+1$の少なくともひとつがpの倍数」となることはない、ということを示します。

(1)より${}_n\mathrm{C}_k > n$である。また、${}_n\mathrm{C}_k = p$(⇐ これは問題で与えられています)であるので$p > n$である。

よって、$n,\ n-1,\ \cdots, n-k+1$ のいずれも p の倍数となることはない。
$\Uparrow$ p の倍数は $p\times$(整数) です。今、n は p より小さい自然数です。他の $n-1, \cdots, n-k+1$ も当然 p より小さい自然数です。もし、自然数でなくて 0 まで含むとなれば $p\times 0$ より 0 は p の倍数です。でも、今回の場合 $n,\ n-1,\ \cdots, n-k+1$ はすべて自然数なんだよね。だから、$p\times 0$ となることもありません。したがって、$n,\ n-1,\ \cdots, n-k+1$ はいずれも p の倍数ではありません。

当たり前のことを詳しく説明したので少し長くなりました。分かっている人にとっては長ったらしく感じたかもしれません。でも、たまに混乱する人もいるので、長めに説明をしておきました。

よって、$2 \leqq k \leqq n-2$ のとき条件をみたす自然数の組 (n, k) は存在しない。

以上より、求める自然数の組 (n, k) は $(n, k) = \boldsymbol{(p, 1),\ (p, p-1)}$ である。

2021 年の九州大学 (理系前期) の過去問です。九州大学の問題としてはそこまで難しい問題ではありません。ですが、受験問題に慣れていない人にとっては難しかったと思います。

九州大学といった難関大学を目指す人は、このくらいの問題を解けるようになっておいてください。