「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

a, b を実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 (a, b) の領域を図示せよ。

【問題の解答】

＊多少メンドウですが、比較的簡単な問題です。こういうふうな問題は多くの人が放物線と x 軸の位置関係で考えます。もちろんそれでも解けますが、解の公式を使って、ずばり解が正であるというふうに解いていくこともできますよ。今回は、後者の解の公式を使って解いていくことにします。

「曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないこと」の必要十分条件は「x の方程式 $ax^2 + bx + 1 = 0 \cdots$ ① が正の解をもたない」ことである。

＊ $a = 0$ のとき方程式は１次方程式なので、$a = 0$ のときとそうでないときとで場合分けをして考えます。

(Ｉ) $a = 0$ のとき

① は $bx + 1 = 0$ となる。$b = 0$ のとき $bx + 1 = 0$ は $1 = 0$ となる。このとき方程式の解はないので適する。$b \neq 0$ のとき $bx + 1 = 0$ の解は $x = -\dfrac{1}{b}$ である。

方程式が正の解を持たないので、$-\dfrac{1}{b} \leqq 0$ つまり $b > 0$ である。

$b = 0$ または $b > 0$ より $b \geqq 0$ である。

(II) $a \neq 0$ のとき

① は x の 2 次方程式である。この方程式の判別式を D とする。$D=b^2-4a$ である。

(i) $D<0$ つまり $b^2-4a<0$ のとき、方程式 ① は実数解をもたない。このとき適する。

(ii) $D \geqq 0$ のとき

① で解の公式より $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ である。

＊正の解を持たない条件は、2 解のうち大きい方の解 (数学的に厳密にいうと、今回の場合重解を含みます。「大きい方」という表現でなくて「小さくない方の解」と表記した方がよいです) が、0 より小さければ OK です。

ボーっとしていたら $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a} \leqq \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ なんじゃないの？と思ってしまいます。ですが、a の符号によって変わってくるよね。$a>0$ のとき $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a} \leqq \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ ですが、$a<0$ のとき $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a} \leqq \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ ですよ。気を付けてくださいね。

方程式 ① が正の解をもたないための必要十分条件は、「方程式 ① の 2 解の $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ のうち、小さくない方の解が 0 以下である」ことである。

(ア) $a>0$ のとき $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a} \leqq \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ であるので小さくない方の解は $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ である。この値が 0 以下であるので

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a} \leqq 0$$

$$-b+\sqrt{b^2-4a} \leqq 0$$ ◀ 両辺に $a\,(>0)$ をかけた！

$$\sqrt{b^2-4a} \leqq b$$

＊ここからルートを消すために両辺を 2 乗します。ただ、両辺を 2 乗したら同値性が崩れるので気を付けてください。$\sqrt{A} \leqq B \iff A \leqq B^2$ かつ $B \geqq 0$ です。

$\sqrt{b^2-4a} \leqq b$ は「$b^2-4a \leqq b^2$ かつ $b \geqq 0$」と同値である。$b^2-4a \leqq b^2$ は

$-4a \leqq 0$ つまり $a \geqq 0$ である。よって、$a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ である。$a > 0$ であるので、$a > 0$ かつ $b \geqq 0$ である。

（イ）$a < 0$ のとき $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a} \leqq \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ であるので小さくない方の解は $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ である。この値が 0 以下であるので

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a} \leqq 0$$

$$-b-\sqrt{b^2-4a} \geqq 0$$ ◀ 両辺に $a\,(<0)$ をかけた！

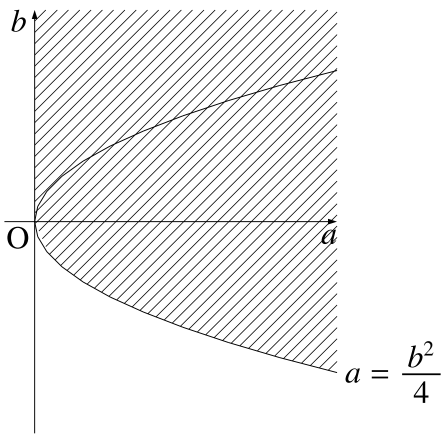
$$\sqrt{b^2-4a} \leqq -b$$

＊ここからルートを消すために両辺を 2 乗します。ただ、両辺を 2 乗したら同値性が崩れるので気を付けてください。$\sqrt{A} \leqq B \iff A \leqq B^2$ かつ $B \geqq 0$ です。

$\sqrt{b^2-4a} \leqq -b$ は「$b^2-4a \leqq (-b)^2$ かつ $-b \geqq 0$」と同値である。$b^2-4a \leqq (-b)^2$ は $-4a \leqq 0$ つまり $a \geqq 0$ である。よって、$a \geqq 0$ かつ $b \leqq 0$ である。$a < 0$ であるので、不適である。
⇑ $a < 0$ かつ $a \geqq 0$ を満たす a は存在しないので不適です。

以上より、「$a = 0$ かつ $b \geqq 0$」または「$b^2-4a < 0$」または「$b^2-4a \geqq 0$ かつ $a > 0$ かつ $b \geqq 0$」である。この不等式を満たす領域は下図のようになる。

＊ここで 3 つの不等式が表す領域を図示して、「または」なので和集合で求めてもらったら OK です。境界線が入る、入らないということは気を付けて図示するようにしてくださいね。



境界線は $a = 0$ かつ $b \geqq 0$ の部分は含み、それ以外は含まない。

東北大学の過去問です。難しく感じた人もいるかもしれませんが、答えを見ればそれほど難しくないと感じた人が多かったと思います。

東北大学といった難関大学でも、出題される問題はそこまで難しくない問題が多いです。基本に忠実に解いていくようにしてください。そうすれば、大学受験の問題も解けるようになりますよ。