

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

3次方程式  $x^3 - 2(a+1)x^2 + (5a^2+1)x + b = 0 \cdots (*)$  がある。ただし、 $a$  は負の定数とする。

- (1) 3次方程式(\*)が  $x=2$  を解にもつとき、 $b = -$    $a^2 +$    $a -$   であり、

$$\begin{aligned} x^3 - 2(a+1)x^2 + (5a^2+1)x + b \\ = (x-2)(x^2 - \text{オ}ax + \text{カ}a^2 - \text{キ}a + \text{ク}) \end{aligned}$$

となる。

- (2) 3次方程式(\*)の3つの解を  $2, z, w$  とするとき、複素数平面上において3点  $2, z, w$  を結んでできる三角形が直角二等辺三角形となる  $a, b$  の値は  $a =$  ,  $b =$   であり、このとき、 $z, w$  は   $\pm$    $i$  である。

【問題の答え】

アイ = 10    ウ = 8    エ = 2    オ = 2    カ = 5    キ = 4    ク = 1    ケコ  
= -1    サシス = -20    セソ = -1    タ = 3

【問題（1）の解答】

\*ただ単に方程式に  $x=2$  を代入すると  $b$  を  $a$  を用いて表すことができます。後半は、組立除法を使って解いた方が速いです。

方程式  $x^3 - 2(a+1)x^2 + (5a^2+1)x + b = 0$  が  $x=2$  を解にもつので

$$2^3 - 2(a+1) \cdot 2^2 + (5a^2 + 1) \cdot 2 + b = 0$$

$$8 - 8a - 8 + 10a^2 + 2 + b = 0$$

$$b = -10a^2 + 8a - 2$$

$\{x^3 - 2(a+1)x^2 + (5a^2 + 1)x + b\} \div (x-2)$  をする。

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2a-2 & 5a^2+1 & -10a^2+8a-2 \\ & & 2 & -4a & 10a^2+2-8a \\ \hline & 1 & -2a & 5a^2+1-4a & 0 \end{array}$$

よって、 $x^3 - 2(a+1)x^2 + (5a^2 + 1)x + b = (x-2)(x^2 - 2ax + 5a^2 - 4a + 1)$

### 【問題（２）の解答】

\*今回の場合、直角二等辺三角形ですが、正三角形もよく出てきます。これらは、数式で解くよりも図形的に考えて解くと簡単に解けるということが多いですよ。

今回も図形的に考えると、計算は本当に簡単です。

$x^2 - 2ax + 5a^2 - 4a + 1 = 0$  の判別式を  $D$  とする。

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-a)^2 - 1 \cdot (5a^2 - 4a + 1) \\ &= a^2 - 5a^2 + 4a - 1 \\ &= -(4a^2 - 4a + 1) \qquad = -(2a - 1)^2 \end{aligned}$$

$a$  は負の定数であるので、 $-(2a-1)^2 < 0$  つまり  $D < 0$  である。

↑  $-(2a-1)^2$  は  $a = \frac{1}{2}$  のとき 0 になり、それ以外の値のときは常に負です。 $a$  は負の定数なので、 $-(2a-1)^2$  は負です。

解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 1 \cdot (5a^2 - 4a + 1)}}{1} \\ &= a \pm \sqrt{-(2a-1)^2} \\ &= a \pm (2a-1)i \end{aligned}$$

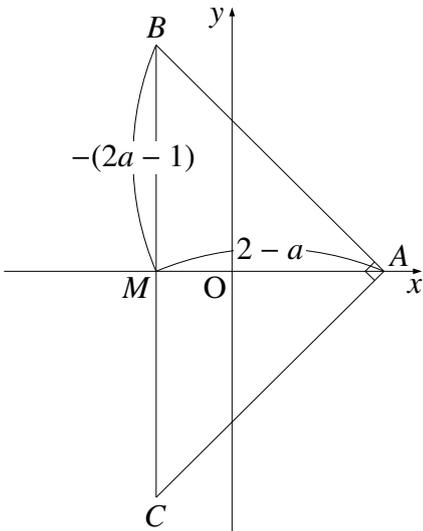
\*上記の  $\sqrt{-(2a-1)^2}$  は、 $\sqrt{-(2a-1)^2} = \sqrt{(2a-1)^2}i = |2a-1|i$  と変形できます (ルート

の中身が2乗のときはルートを外すとき絶対値がつくんだよね。

ただ、今回の場合  $a < 0$  より  $2a - 1 < 0$  です。これより  $|2a - 1|i = -(2a - 1)i$  です。これを  $a \pm \sqrt{-(2a - 1)^2}$  にあてはめると  $a \pm \{-(2a - 1)i\} = a \mp (2a - 1)i$  です。± も ∓ も「プラスまたはマイナス」ということなので、見慣れた形の「±」を使って、 $a \pm (2a - 1)i$  と表しました。

$a < 0$  ということを考えると、3点二等辺三角形は下図のようになる。ただし、 $A(2), B(a - (2a - 1)i), C(a + (2a - 1)i)$  とし辺  $BC$  の中点を点  $M$  とする。

↑  $a < 0$  より  $a - (2a - 1)i$  の虚部  $-(2a - 1)$  は正となり、 $a + (2a - 1)i$  の虚部の  $(2a - 1)$  は負です。このことを考えて図示します。 $B$  と  $C$  の位置を間違えやすいの気を付けてください。



↑  $\triangle ABC$  が  $A$  を直角とする直角二等辺三角形のとき、 $\triangle BMA$  は  $M$  を直角とする直角二等辺三角形となります。このとき、 $BM : BA : MA = 1 : \sqrt{2} : 1$  です。このうち、 $BM : MA = 1 : 1$  つまり  $BM = MA$  を使えば  $a$  が求まります。

上図より  $\triangle BMP$  は  $BM = MA$  となる。 $BM = -(2a - 1), MA = 2 - a$  より  $-(2a - 1) = 2 - a$  つまり  $a = -1$  となる。

また、 $b = -10a^2 + 8a - 2$  に  $a = -1$  を代入すると、 $b = -10 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 2 = -20$  である。

このとき、 $z, w$  は  $a \pm (2a - 1)i$  に  $a = -1$  を代入して、 $-1 \pm 3i$  となる。

\*最初は、まあ一応判別式をしました。記述なら、この部分は必要です。ただ、マークの場合、こんなことわざわざしなくていいですよ。

「いかに速く解くか？」ということだけを意識して解くようにしてください。

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



---

ツイッターやっています  
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法  
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法  
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）  
[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司