

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

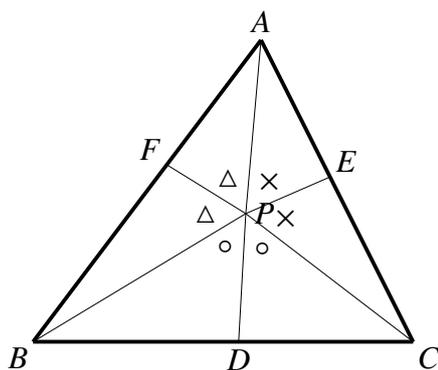
「チェバの定理の逆」に関する問題と数学の考え方について

いきなりですが、チェバの定理を使って解く有名問題と、その解答を掲載します。なぜ、そのような解答にいたったか？ということは、解答の後に記載していくことにします。

「高校数学の問題を、どういうふうに解くか？」ということを解説します。「数学の勉強を頑張っているのに、成績がなかなか上がらない(涙)」なんていう人に読んで欲しい内容です。

問題

$\triangle ABC$ の内部に定点 P がある。 $\angle BPC$, $\angle CPA$, $\angle APB$ の二等分線と辺 BC , CA , AB との交点をそれぞれ D , E , F とする。このとき、 AD , BE , CF は1点で交わることを示せ。



【解答】

角の二等分線の性質より、 $PB : PC = BD : DC$ つまり $\frac{BD}{DC} = \frac{PB}{PC} \dots \textcircled{1}$ 、 $PC : PA = CE : EA$ つまり $\frac{CE}{EA} = \frac{PC}{PA} \dots \textcircled{2}$ 、 $PA : PB = AF : FB$ つまり $\frac{AF}{FB} = \frac{PA}{PB} \dots \textcircled{3}$ がそれぞれ成立する。

$$\begin{aligned} & \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \\ &= \frac{PB}{PC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{PA}{PB} \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

チェバの定理の逆より、 AD , BE , CD は1点で交わる。(証明終)

さっきの問題、上記の解答だけですんなり理解できたという人もいると思うけど、中には「何言ってんの？」なんていう人もいます。

これか、順を追って解説をしていくことにするね。

まずは、チェバの定理の確認からです。

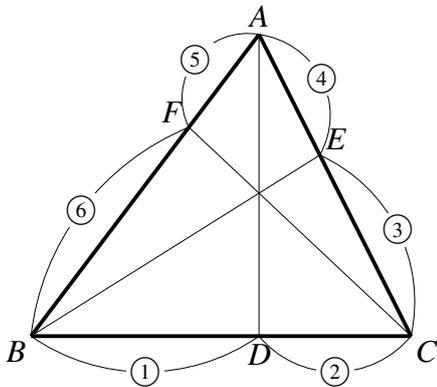
チェバの定理

△ABC の 3 頂点 A, B, C と、三角形の辺上またはその延長上にない点 O を結ぶ直線が、対辺 BC, CA, AB またはその延長と交わるとき、交点をそれぞれ P, Q, R とすると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

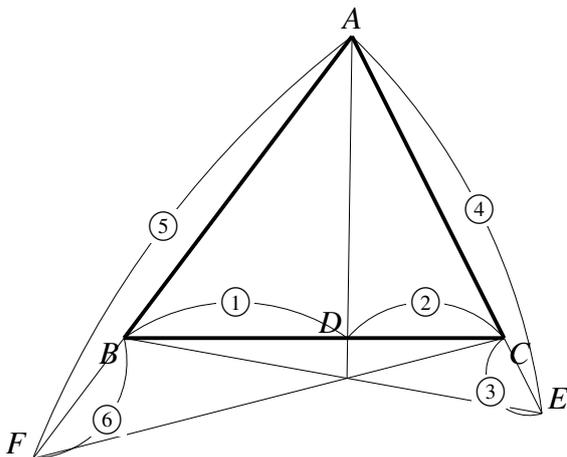
が成立する。

上記は教科書に載っている通りの定理です。少し分かりにくいけど、まあ簡単にいうと「3 頂点からの直線が 1 点で交わるとき、チェバの定理を使えますよ」ということです。チェバの定理は、以下のようなときに使えることを覚えている人が多いと思います。



チェバの定理は上記のようなとき、 $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ が成立します。僕の場合、チェバの定理は、すべて点 B から出発したんだけど、内分を 3 回繰り返して元の点 B に戻ってきたら OK と覚えています。また、上図のように番号付けをして $\frac{①}{②} \cdot \frac{③}{④} \cdot \frac{⑤}{⑥} = 1$ と覚えています。

ただね、このようにチェバの定理はすべて内分するときにはしか使えないと思っている人がいます。でも、チェバの定理は「3頂点から出る直線が1点で交わっていればOK」だったんだよね。別に、三角形の内部で交わっていなくても、下記のように3角形の外部で交わっている場合でもOKですよ。



上図のように3頂点から出た直線が三角形の外部で1点交わるときもチェバの定理は成立しますよ。辺の延長との交点の座標をそれぞれF,Eとすると、交点が内部にあるときとまったく同じ $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ が成立します。

*この交点が三角形の外部にあるパターンはほとんど出題されません。だから、僕は頂点から出た図形が1点で交わるときチェバの定理を使える。そして、そのチェバの定理は、内部にあるときとまったく同じ式が成立する、と覚えています。めったに出てこないものまで、頑張って暗記する必要はないですよ。

このチェバの定理はその逆の定理、「チェバの定理の逆」と呼ばれる定理があります。

チェバの定理の逆

$\triangle ABC$ の辺BC, CA, ABまたはその延長上に、それぞれ点P, Q, Rがあり、この3点のうち1個または3個が辺上にあるとする。このとき、BQとCRが交わり、かつ

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

が成り立つならば、3つの直線AP, BQ, CRは1点で交わる。

すべてを丁寧に考えると上記のような表現になってしまいます。ただ、チェバの定理の

逆が問われるときは、3点 P, Q, R が辺上にあるときがほとんどなので、以下のように覚えておいてもらってもよいと思いますよ。

チェバの定理の逆

$\triangle ABC$ において、辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R があるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \text{ ならば } 3 \text{ 直線 } AP, BQ, CR \text{ が } 1 \text{ 点で交わる}$$

で、ここからが数学の考え方の話です。

今回紹介した問題だけど、よく「答えを見たらわかるけど、いきなりチェバの定理の逆を使って解くなんて解法、思いつきません」と高校生から言われます。

その気持ち本当によくわかります。僕も、高校生のときはそのように感じていました。でも、すぐに気づけるようになりました。

どうしたことかという、「3直線が1点で交わることを示すとき、チェバの定理の逆を使うことがある」ということを覚えてしまったからです。

問題文が「3直線が1点で交わることを示せ」となった瞬間に「これはチェバの定理の逆を使うのかな？」と考えます。もちろん、3直線が1点で交わることを示せ、という問題はすべて「チェバの定理の逆」を使って解くか？と言えば、そうではないですよ。

ただ、「使う可能性がある」ということです。「3直線が1点で交わる」という表現を見た瞬間に「チェバの定理の逆かな？」と考えます。それで、解けたらOKだし。それで、解けなければチェバの定理の逆以外の解法があるはずですよ。

数学ってこういうものが多いです。「○○とくれば、△△って解法かな？」ということ覚えておきます。そして、それにあてはめて解いていきます。

先ほど話したように、それで解けたらOKだし、それで解けなければ別の解法を考えます。

ただ、当たり前だけどまったく知識のない段階でそんなことできないよね。だから、数

学は、まず覚えるべき定理・公式、典型問題の解法をすべて頭に叩き込みます。

そして、大学受験のような難しい問題を解くときは、「これまで得てきた知識・解法の中でどれをあてはめて解いていくんだろう？」と考えます。

知識ゼロの状態では、どんなに考えても無理ですよ。

よく「数学は考えることが重要。暗記なんて意味がない!!」なんて言う人がいます。でも、この問題でも見たらわかるよね。たとえば、東大にうかるレベルにある人でも「チェバの定理の逆」の解法が頭になれば、その場で思いつくなんて無理ですよ。

だから、最初のうちはとにかく丸暗記なんです。チャートでも学校で使っている教科書準拠の問題集でも OK です。たいへんだけど、最初のうちは、それらにのっている解法をすべて頭にいれる、それではじめて難しい問題も解けるようになります。

ちょっと、厳しい言い方になってしまったけど、このことを頭に入れておいてくださいね。

あと、「数学には与えられた情報はすべて使う!」という鉄則があります。今回の問題の場合、角の二等分線という情報が与えられているよね。

で、その「角の二等分線」という情報を使って解かないといけないんだけど、角の二等分線とくれば使える解答で使ったものしかありません。

数学では、不必要な情報が与えられることはまずありません。問題に行き詰った場合、与えられた情報をすべて使いきっているか？ということを徹底的に考えるようにしてください。

また、今回の二等分線のように与えられた情報と言っても使い方がたった1通りしかないものも多いです。そういうことを頭にいれて、問題を解くようにしてください。

今回は、チェバの定理の紹介というよりも、数学の考え方、勉強の仕方ということの方

を覚えておいて欲しいです。全統模試で偏差値 65、少なくとも偏差値 60 もない人は余計なことをせずに徹底して基本事項を覚えていった方がよいですよ。

そうしないと、難しい問題を解いても絶対に時間の無駄です。定理・公式、典型問題の解法を頭にたたきこむ。それが終わってから、難しい問題に進むことにしてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司