

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅰの「2次関数」 難易度：「基礎」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

方程式 $kx^2 + (k-1)x + 2 = 0$ の実数解の個数を求めよ。ただし、 k は定数とする。

【解説】

「2次方程式の実数解の個数ね。じゃあ、判別式を使えばいいな」と考える人がいます。

でも、気を付けないとだめですよ。今回 $k=0$ のときは、与えられた方程式は2次方程式ではなくなってしまふよね。気を付けてくださいね。

判別式を使うときの注意点

判別式を使えるのは2次方程式のときだけ！方程式で x^2 の係数が文字を含んだ式の場合は気を付ける！！

【解答】

(I) $k=0$ のとき

* $k=0$ のとき、与えられた方程式 $kx^2 + (k-1)x + 2 = 0$ は2次方程式でなくなる！だから、場合分け。この場合、単純に $k=0$ を代入して考えていけばいいですよ。

このとき、 $kx^2 + (k-1)x + 2 = 0$ は $0 \cdot x^2 + (0-1)x + 2 = 0$ つまり $-x + 2 = 0$ より $x = 2$ となる。

よって、 $k = 0$ のとき方程式の実数解の個数は 1 個。

↑ 少し混乱する人がいるけど、気を付けてください。今回、与えられた方程式を解いたら $x = 2$ だったんだよね。つまり、この方程式は $x = 2$ という実数解を 1 個もちます。だから、方程式の実数解の個数も 1 個です。

(II) $k \neq 0$ のとき

↑ $k \neq 0$ のとき、方程式 $kx^2 + (k-1)x + 2 = 0$ は 2 次方程式！だから、判別式が使えます。

方程式 $kx^2 + (k-1)x + 2 = 0$ の判別式を D とする。

$$\begin{aligned} D &= (k-1)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 \quad \blacktriangleleft D = b^2 - 4ac \text{ より！今回は、} a = k, b = k-1, c = 2 \\ &= k^2 - 2k + 1 - 8k \\ &= k^2 - 10k + 1 \end{aligned}$$

$k^2 - 10k + 1 = 0$ の解を求める。

$$\text{解の公式より } k = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 1 \cdot 1}}{1} = 5 \pm \sqrt{24} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

* 解の公式で $ax^2 + bx + c = 0$ で、 b が 2 で割れるときは、 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ で

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \text{ の公式を使った方が計算がラクですよ。}$$

別に、公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ でもできます。ですが、この形ですると必ず約分しないといけないのでジャッカン計算がメンドウです。数学は時間との勝負となるので、できたら覚えておいてください。

(i) $D < 0$ のとき

$k^2 - 10k + 1 < 0$ となる、この 2 次不等式を解くと $5 - 2\sqrt{6} < k < 5 + 2\sqrt{6}$ となる。

$5^2 = 25, (2\sqrt{6})^2 = 24$ より $5 - 2\sqrt{6} > 0$ となり、これは $k \neq 0$ をみたらす。

↑ 今回は $k \neq 0$ のもとで考えているんだよね。だから、当然最終的に $k \neq 0$ を合わせて考えないといけないよ。

今回でてきた解の $5 - 2\sqrt{6} < k < 5 + 2\sqrt{6}$ が $k \neq 0$ を満たしているので、 $5 - 2\sqrt{6} < k < 5 + 2\sqrt{6}$ はすべて OK です。

また、今回の場合何も説明なしで $5 - 2\sqrt{6} > 0$ と書いてもおそらく大丈夫です。ただ、ルートを含んだ数を厳密に大小比較するときは、上記のように2乗をして考えますよ。たまに出てくるので覚えておいてくださいね。

(ii) $D = 0$ のとき

$k^2 - 10k + 1 = 0$ より、 $k = 5 \pm 2\sqrt{6}$ となる。これは $k = 0$ をみたく。

↑ $k = 5 \pm 2\sqrt{6}$ は $k \neq 0$ をみたくのは、当たり前だよ。ただ、今回も $k \neq 0$ のもとで考えているので書いています。

(iii) $D > 0$ のとき

$k^2 - 10k + 1 > 0$ となる、この2次不等式を解くと $k < 5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6} < k$ となる。

$k \neq 0$ となることとあわせると、 $k < 0, 0 < k < 5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6} < k$ のとき、実数解は2個である。

↑ 少しややこしいけど、 $k < 5 - 2\sqrt{6}$ かつ $k < 0$ は、 $k < 0$ または $0 < k < 5 - 2\sqrt{6}$ です。厳密に言えば「または」なんですけど、「または」は省略することもありますよ。

以上より、 $k < 0, 0 < k < 5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6} < k$ のとき実数解2個。 $k = 0, k = 5 \pm 2\sqrt{6}$ のとき実数解1個。 $5 - 2\sqrt{6} < k < 5 + 2\sqrt{6}$ のとき、実数解0個。

今回の問題はどうかっただけでしょうか。ポイントしては、1つだけです。一見2次方程式に見えても、 x^2 の係数が0だったら2次方程式になりません。

そのことに気を付けてくださいね、という問題です。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司