質問内容

次の問題ってどう解けばいいですか？

問題

n を自然数とする。$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ を示せ。

回答

そうですね？どういうふうに考えていこうかな？よく分からないけど、両辺を n 乗します。

$\Uparrow$ なぜ、両辺を n 乗する？と思った人もいると思います。数学は、とにかく考えにくいものは変形していくと言う考え方があります。

$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ の両辺を n 乗すると、$n < \left(1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)^n$ となり、累乗根($\sqrt[n]{\bigcirc}$) より、$(\bigcirc + \bigcirc)^n$ の方が考えやすいよね？だから、解き方を考える以前にまず両辺を n 乗しました。

繰り返しになりますが、「考えにくいときは考えやすいように式変形をする」というのがポイントです。他にも、有名どころでは、分数を含んだ方程式は、両辺に適当な数をかけて分数を消去して考えていきます。

とにかく、考えづらいときは、考えやすく式変形をするということを覚えておいてください。

で、$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ の両辺を n 乗して …

(注) 分かっていると思うから、説明は省きましたが不等式の両辺を n 乗するときは、必ず両辺の正負を確認しておかないといけないよ。このあたりのことが分からない人は、次のプリントを見てください。

「不等式の両辺に変数をかけるときの注意点」http://www.hmg-gen.com/ryouhen.pdf

それでは、問題に戻ります。$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ の両辺を n 乗すると、$n < \left(1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)^n$ となります。

とりあえず、ここまで来たけど、上記の右辺を見たら次のことをすぐに思いつかないといけません。

$(\bigcirc + \bigcirc)^n$ の扱い方

問題を解いていて、$(\bigcirc + \bigcirc)^n$ が出てきたときは、ほとんどの場合 2 項定理を使って展開をする。

こういった問題を解いていて、$n < \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$ までの式変形は気づける人が多いんですが、ここから 2 項定理を使うということに気づけない人も多いです。確かに気づきにくいかもしれないんですけど、$(\bigcirc + \bigcirc)^n$ を見たら、 2 項定理を使うことが多いということを知っていればすぐに気づけるようになりますよね？

2 項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0\, a^n + {}_n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\, a\, b^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\, b^n$$

とりあえず $\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$ を 2 項定理を使って展開していってみます。

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\sqrt{\frac{2}{n}} + {}_n\mathrm{C}_2\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$= 1 + n\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{2}{n} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

⇑ ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ であることに注意

$$= 1 + \sqrt{2n} + n - 1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

⇑ $n\sqrt{\frac{2}{n}} = \sqrt{n}\cancel{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{n}}} = \sqrt{2n}$, $\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{2}{n} = \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\cancel{n}} = n - 1$ より

$$= n + \sqrt{2n} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

で、ここまできたら分かると思うけど、$n < \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$ を示したいんだけ、右辺は $n + \sqrt{2n} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$ となりました。すべての項が正ということを考えると、n にさらに $\sqrt{2n} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$ という正の値を加えているので当然 n より大きくなります。これで証明終了です。

たまに、

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$={}_nC_0+{}_nC_1\sqrt{\frac{2}{n}}+{}_nC_2\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2+\cdots+{}_nC_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1}+{}_nC_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

となっていますけど、ここで止めるってなぜ分かったのですか？

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$={}_nC_0+{}_nC_1\sqrt{\frac{2}{n}}+{}_nC_2\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2+{}_nC_3\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^3+\cdots+{}_nC_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1}+{}_nC_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

上記まで、式変形をしてもいいし、もっと式変形をしてもいいと思います。

このようにいう人がいます。確かにそうです。でも、今回は(右辺)が n より大きいっていうことが言えたらいいんだよね？だから、解答のようなときに n が出てきた証明できたからそうしているだけです。

こういった2項定理を使った証明はどこまで式変形をするか、問題を解く前から分かる訳ではありません。とりあえず、ひとつだけ、それで無理ならふたつやる。それでも無理ならさらにもうひとつと徐々に増やしていき、証明できるところまでやっているだけです。

それでは、解答に進みたいと思います。先ほどの2項定理を使って示しますがこれが言えるのは $n \geqq 2$ のときです。$n=1$ のときは、${}_nC_2$ って存在しないよね？ですから、場合分けが必要です。

【解答】

両辺が正であるので

$$\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\Leftrightarrow\ n<\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

以下、$n<\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$ を示す。

(i) $n=1$ のとき

(左辺) = 1　(右辺) = $1+\sqrt{2}$ となるので、成立する。

(ii) $n \geqq 2$ のとき

$$(\text{右辺}) = \left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\sqrt{\frac{2}{n}} + {}_n\mathrm{C}_2\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$= 1 + n\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{2}{n} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

$\Uparrow$ ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ であることに注意

$$= 1 + \sqrt{2n} + n - 1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

$\Uparrow$ $n\sqrt{\frac{2}{n}} = \sqrt{n}\cancel{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{n}}} = \sqrt{2n}$, $\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{2}{n} = \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{n}} = n-1$ より

$$= n + \sqrt{2n} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$> n = (\text{左辺})$$

以上より、全ての自然数 n において、

$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$ が成立する。

今回のプリントはこれで終わりです。どうだったでしょうか？何度も話しましたが、数学はこういった形のときは、このように式変形をするという決まりがあります。

今回の問題では、「累乗根は考えにくいので消去する」「$(\bigcirc + \bigcirc)^n$ の形をみたら 2 項定理を使う」です。こういったものをひとつずつ覚えていくと、「解答を見たら分かるけど、なかなか解法が思いつかないな」という人でも思いつけるようになります。今後も、そういった考えを紹介していきますので、よろしくお願いします。

それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com